これまでの研究成果のまとめ

佐藤拓也

以下で用いる引用番号は、別紙の研究業績リストの論文番号に対応しています。

主要論文とこれまでの研究概要

• 消散型非線形 Schrödinger 方程式の解の大域挙動の解明 ([1], [3], [4], [7], [8], [11]):
応募者は、消散型非線形 Schrödinger 方程式に関して、解の質量の減衰と非減衰を分かつ非線形項の臨界指数の存在を明らかにし、非線形冪がこの臨界指数より大きな場合には解の質量減衰が起こらず、単調に減少しながら正値に収束することを厳密に示した ([4])。この臨界指数は冪乗型非線形項を備える非線形熱方程式の藤田臨界指数や、非線形 Schrödinger 方程式において、解の長距離散乱を誘発する Barab-小澤臨界指数と一致する点でこれまでに知られていた臨界指数に新しい意味を添えることとなった。一方、非線形冪が臨界冪と一致、あるいは下回る場合では、解の質量の減衰が知られていたが、その最適な減衰オーダーについては未解明であった。そこで、応募者は解の漸近形に注目することで、解の空間変数に対する可微分性が質量の時間減衰度に対応していることを推測し、ほとんど最適な減衰オーダーを同定した ([1],[3],[7])。以下の表 1 は、空間 1 次元の臨界問題に対する解の質量減衰オーダーを示す。

表 1: 消散型非線形 Schrödinger 方程式に対する解の可微分性と質量減衰オーダー

解の微分階数	k 階微分可能 $(k \geq 1)$	$G_v^s(\mathbb{R})$	$G_v^1(\mathbb{R}) = C^\omega$
減衰オーダー	$(\log t)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2k+1)}}$	$(\log t)^{-\frac{1}{2}}(\log\log t)^{\frac{s}{2}}$	$(\log t)^{-\frac{1}{2}}(\log\log t)^{\frac{1}{2}}$

ここで $G_v^s(\mathbb{R})$ は二乗可積分クラスをベースとした Gevrey クラスであり、無限階微分可能なクラスである。表 1 は滑らかさの指標である Gevrey 指数 s が解の質量減衰に反映していることを示し、Gevrey クラスに属する解の質量減衰がほとんど最適な質量減衰を与えることを表している ([1])。特に C_ω クラスの解の上からの減衰評価 ([3]) については、最適であることが示された ([11])。論文 [11] では、方程式の持つ対称性を用いることで、ソリトン形の初期値に対応する解が C_ω 減衰オーダーを持つことがわかった。

• 消散型非線形 Schrödinger 方程式の解の最適な減衰評価 ([5], [6], [10]):
臨界次数を持つ非線形消散型 Schrödinger 方程式に関しては、これまでの研究により、滑らかな解ほどその質量は速く減衰することが知られている。しかし、非線形冪が臨界冪を下回る場合は、非線形項の可微分性が著しく悪くなり、滑らかな解を構成することは一般に難しい。しかし、熊本大学の北直泰教授との共同研究により、無限階微分可能な解の漸近形を先に同定し、そのプロファイルに漸近収束する解を時刻無限大から時間負の向きに構成 (いわゆる終端値問題) することで、最適な減衰減衰を示す解の存在を示した。ここでは、漸近形に強い可微分性を要求しているが、実際の解にはエネルギーが定義できる程度の可微分性しか要求しておらず、初期値問題を考える上で困難となっていた、正則性の問題を回避している。