

これまでの研究成果のまとめ

$\beta > 1$ とする。 y の整数部分を $[y]$ 、小数部分を $\{y\}$ で表し、 $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ を $T(x) = \{\beta x\}$ と定義する。このとき $x \in [0,1]$ に対し $c_n = [\beta T^{n-1}(x)]$ とおくことで x の β に基づく展開

$$x = c_1\beta^{-1} + c_2\beta^{-2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta^{-n}$$

を得る。これを $d_\beta(x) = c_1c_2\dots$ と表す。 $x \in [0, \infty)$ に対し x のベータ展開とは、

$$x = c_1\beta^{L(x)-1} + c_2\beta^{L(x)-2} + \dots + c_{L(x)-1}\beta + c_{L(x)} + c_{L(x)+1}\beta^{-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta^{L(x)-n}$$

$$\text{where } L(x) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x\beta^{-n} < 1\}, \quad d_\beta(\beta^{-L(x)}x) = c_1c_2\dots$$

によって定義される展開のことである。ただし、 $c_1c_2\dots c_{L(x)}$ は空語でもよい。ベータ展開で末尾が 0 のみとなるとき、 x は有限ベータ展開を持つという。今後、 x が有限ベータ展開を持つような実数 x の全体を $\text{Fin}(\beta)$ と表す。

任意の正整数は有限な 10 進展開をもつ。Frougny と Solomyak はこの有限性条件の一般化として、次の β に関する 3 つの条件を考えた。

$$(F_1) \quad \mathbb{N} \subset \text{Fin}(\beta)$$

$$(PF) \quad \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] \subset \text{Fin}(\beta) \text{ where } \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k\beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

$$(F) \quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} \subset \text{Fin}(\beta) \text{ where } \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k\beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z} \cap [0, \infty) \right\}$$

ここに $\text{Fin}(\beta)$ は有限ベータ展開をもつ非負数 x の全体である。

(1) 有限ベータ展開とオドメーター (査読付き論文リスト [1])

私は吉田雅通氏との共同研究において β に付随するオドメーターを導入し、オドメーターの全射性及び単射性がそれぞれ (F)、(PF) と同値になることを示した。さらに β が代数的整数の場合にオドメーターの導出過程を有限オートマトンで記述し、 β が (F) を満たすこととオドメーターの計算可能性が同値になることを証明した。

(2) 有限性条件を満たす 3 次の Pisot 数のいくつかのクラスについて (査読付き論文リスト [2])

Akiyama は (F) を満たす 3 次の Pisot 単数を特徴づけた。さらに Akiyama は Brounotte らとの共同研究で、set of witnesses という集合を利用することで (F) の十分条件を与えるアルゴリズムを考案した。一方、私は上述のオドメーターを記述する有限オートマトンを利用して、Akiyama の 3 次の Pisot 単数の特徴づけの拡張を得、さらにそれが手計算の範囲で判定できることを証明した。またその証明の中で、set of witnesses より厳密に小さい集合によって (F) を判定できるクラスが存在することも発見し、同時に Akiyama らの手法では (F) か否か判定できなかったクラスで (F) を満たすものを発見した。

(3) 自然数の有限ベータ展開について (査読付き論文リスト [3])

(F₁) を満たす β は Pisot 数になることが知られていたが、(F₁) についてはそれ以上のことは知られていなかった。本研究では与えられた Pisot 数が (F₁) を満たすことを確認する方法を発見し、それを利用してこれまで未解決であった (PF) を満たさないが (F₁) を満たす β の存在を証明した。