研究成果および研究計画

梅田亨

研究成果のまとめ

研究の基本的な関心は双対性にある．

大学院 (修士・博士) では，主に函数解析的手法による，表現の一般論および具体的な表現の構成に関する問題を扱った．特に，辰馬双対定理の簡明な扱い [1]，局所コンパクト群 G 上の $L^\infty(G)$ に於ける双対定理 (交換子定理)[2] などを扱い，また，シンプレクティック群の被覆群の表現の構成をした [3]．最後のものは，数論に於ける高次相互法則への応用を狙った久保田富雄氏の発想に導かれてのことである．

博士論文では，より代数的な古典型リー環の冪零元の共軛性の特別な現象について研究をした [4]．この解析の手法にも，対称群の表現のみならず，円分多項式などの数論的なものなどさまざまなものを用いている．

以上は，どちらかというと散発的な結果であるが，1989 年に渡米し，イェール大学ハウ (R. Howe) 教授と共同研究をしたことが大きな転機となり，ハウ教授の代表的研究である dual pair 理論 (これも双対定理の形をとる) と，その微分作用素に於ける具体的表示であるカペリ (Capelli) 恒等式とその一般化について，系統的な研究を行うことになった [5]．この論文は，その後の (世界の) どの研究でも必ず引用される決定的な方向を示したものである．

その後，その量子群版であるとか，関連した研究を通じてカペリ恒等式とその変種・関連分野について，基礎的，および発展的な研究を進めてきた ([6][8][10][11][12][14][15][16][19][21] など)．カペリ恒等式とは，普遍包絡環の中心を表現に於ける不変微分作用素として書くものであるが，その中に双対性が集約されるのである．それらの概説については，日本語論説のほか，その英訳 [13] と，それ以降の技法をまとめた [17] などで標準的な考え方を示した．

これらの研究に関係して，特殊函数，特に超幾何多項式と，双対定理が密接につながっていることの指摘も，興味深い視点である．

これらの点については，2022 年度日本数学会秋季総合分科会 (北大，2022.9.13) において依頼された「企画特別講演」で若干の総括を行った．

それ以外に (時に関係はするが)，古い論文の解読を通じて，それを現代に甦らせる手法を[12][16][18][19] などの論文で実現した．さらに，数学史にかかわるものとして，ガロア自身の論文の精密な読み解きを行い，2024 年の津田塾大学での第 34 回数学史研究会で発表を行い，その報告集で詳細を発表する (報告集は 2025 年発行予定)．

Program on my study

As I mentioned in the item "About my past research", my theme has been mainly on the Capelli identities. There are lots of different variations and possibilities to develop on it. I dare say, too many possibilities, and no one could exhaust such theme. We could feel, however, any, though small, possibilities to catch something there. Technical difficulties are in that we treat sort of complicated no-commutativities. Still, in many points, we succeeded in getting non-trivial results.

In the past, I had some hopeful ideas to new results. But, I regret I had no enough time to pursue those ideas. Now, I am hoping to return to face these ideas.

One example is the Capelli identities for the dual pair $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{o}_m)$. We know that such identities are far from obvious, as M. Itoh calculated. I think, however, other approaches would be hopeful, which idea came to me in 2000. I hope I could restart to pursue this train of thought.

I have other unpublished results on invariant theory, so that I should complete these studies.

Another theme is to investigate the works by Lambert, who lived about 300 years ago. There are lots of interesting things to look at. Among them, his W function is a particular special function, which has many different aspects with applications. Also, Lambert is known as quite a scholar, so that study on him will be fruitful even to the modern time.

What I have proposed are, though scatterd in some sense, are possibly unified in a background. It is my experience.

I once read through very old paper by Euler on the pentagonal number theorem, and got a new prospect from it. Also, from a paper by Turnbull, I got a new type of Capelli identities. So, from the Lambert work, I hopefully get something new to us.

Lambert's work on W function are, deeply related to solution of algebraic equations, apart from the pure "algebraic" approach. From this point of view, a new aspect for what Lagange, Euler, and Galois thought on the algebraic equations, would be obtained, I hope. It is very interesting point of view.

Another topic that I am interested in is the notion of "pseudo-topology". This notion is, on one hand a sort of anscetor of "topology", and actually, despite its name, a finer structure than topology on the other hand. Also it is also a natural structure from the categorical point of view. This notion has been noticed from the notion of 'topos' initiated