

## これまでの研究成果のまとめ

氏名 山口 睦

論文リストの論文 [1] では Stiefel 多様体の二重ループ空間の mod  $p$  ホモロジー環の構造を決定した. その際に Eilenberg-Moore スペクトル系列と呼ばれる概念を計算の主な手段として用いたのであるが, 論文 [2] で Eilenberg-Moore スペクトル系列に関する二つの定理を示して論文 [1] で行った計算に応用した.

論文 [3] はジョーンズ・ホプキンス大学において Ph.D. の学位を取得する際の学位論文であるが, ここでは, 球面の二重ループに対して Morava  $K$ -理論と呼ばれる  $K$ -理論を一般化した一般ホモロジー論の環構造を決定している.

位相空間  $X$  を素数  $p$  で局所化したとき, いくつかの局所化された球面の直積とホモトピー同値になるならば  $X$  は  $p$ -正則であるという. J. P. Serre により, 古典型リー群が  $p$ -正則であるための必要十分条件が与えられているが, 論文 [4] ではこの結果を Stiefel 多様体に拡張することを試みた. Stiefel 多様体のコホモロジー群へのコホモロジー作用素の作用の仕方を調べることによって得られる Stiefel 多様体が  $p$ -正則であるための必要条件が  $p = 2, 3$  の場合は十分条件でもあることを示し,  $p$  が 5 以上の素数の場合は複素 Stiefel 多様体  $SU(n+k)/SU(n)$  と四元 Stiefel 多様体  $Sp(n+k)/Sp(n)$  に対し, 有限個の  $(n, k)$  の組を除いて, 得られた必要条件が十分条件になることを示した.

複素コボルディズム論を用いて, 球面の安定ホモトピー群に収束する Adams-Novikov スペクトル系列と呼ばれるスペクトル系列が構成されるが, さらにその  $E_2$ -項に収束するある種のスペクトル系列があり, その  $E_2$ -項は Morava 安定化代数と呼ばれる代数のコホモロジーで与えられ, 論文 [5] ではその環構造を決定した.

位相群をホモトピー論的に一般化した概念, すなわち位相空間のホモトピー圏におけるモノイドを Hopf 空間と呼ぶが, J. Harper により, 各奇素数  $p$  に対し単連結で有限個の胞体からなる Hopf 空間  $K(p)$  で, その整数係数のホモロジー群が位数  $p$  の元をもつようなものが構成された. 論文 [6] では種々のホモトピー論的なテクニックを駆使することにより,  $K(p)$  のホモトピー群から複素ボルディズムホモロジー群への Hurewicz 準同型写像を決定している.

論文 [7] では, 1次元形式群から定義される亜群の概念について考察を行うことにより, 楕円的ホモロジー論に付随する “Hopf algebroid” と呼ばれる次数付可換代数の圏における代数的対象の構造を決定した.

論文 [8] では複素射影空間の実  $K$ -コホモロジー環の構造を決定し, 論文 [9] では無限次元複素射影空間の実  $K$ -ホモロジー環の構造を決定した. これらの結果は実験的な色彩が強いが, 複素射影空間の実  $K$ -(コ)ホモロジーと実  $K$ -ホモロジー論に付随する Hopf algebroid と関連を調べることが, これらの論文を著した動機であった.

論文 [10] ではコホモロジー作用素のなす環である Steenrod 代数における “excess” と呼ばれる概念から定義されるフィルトレーションがもつ構造を抽出して, Steenrod 代数の概念を一般化した. さらに, 一般化された Steenrod 代数上に非安定加群の概念を拡張して, その理論の再構築を試みるとともに, 双対 Steenrod 代数で表現される群スキームを無限次元行列群に埋め込むことによって, Steenrod 代数を剰余環とするような一般化された Steenrod 代数の例を構成した.

一般ホモロジー論  $E$  がある条件を満たすとき,  $E$  には Hopf algebroid が付随し, 空間  $X$  の  $E$  ホモロジー  $E_*(X)$  は付随する Hopf algebroid 上の余加群の構造を持つ. Hopf algebroid は次数付可換代数の圏の双対圏における亜群に他ならないため, Hopf algebroid 上の余加群は Hopf algebroid が定める亜群の「表現」と考えられる. そこで論文 [11] ではファイバー圏の概念を用いて一般に有限極限をもつ圏における亜群 (さらに一般には internal category) の表現の概念を定義し, internal category の間の射による表現の引き戻しや正則表現を定義して, 一般ホモロジー論を亜群の表現論として捉えるための基礎を築いた.

岸本氏との共著論文 [12] では, 有理ホモトピー論を用いて空間の高次元相的複雑さが増大する差分を評価する不等式を示した.

mod  $p$  双対 Steenrod 代数で表現される群スキームを  $G$  とすれば, 論文 [10] の Appendix で,  $G$  は加法的形式群の自己同型群スキームのある部分群スキームと同型であることを示した. その結果を用いて論文 [13] では,  $G$  の部分群からなる減少列を適切に定義して,  $G$  の降中心列の  $n$  番目の部分群の大きさを評価し,  $G$  の有限部分群の冪零性を示して中心列の長さを評価した. また, 群の商写像の列  $G = G_0 \xrightarrow{\pi_0} G_1 \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\pi_n} G_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} \dots$  で, 各  $n$  に対して  $\text{Ker } \pi_n$  が  $G_n$  の “elementary abelian  $p$ -group” である極大アーベル群であるものを構成した.