今後の研究計画

吉田　はん

2003 年， G. Perelman によって幾何化予想が解決され，3 次元多様体は一意的な幾何構造を持つことが証明された．双曲構造は，この幾何構造のうちで主要な位置を占めると考えられている．3 次元多様体の性質を研究する上でも，双曲構造を考えることは有用である．

2 つの双曲 3 次元多様体または軌道体（特異点があるもの）M_1, M_2 が共通の有限被覆空間を持つとき，M_1 と M_2 は**通約可能 (commensurable)** であるという．‘ 通約可能 ’ という関係は同値関係になる．以下の基本的な問題が考えられる．

問題 1 与えられた二つの双曲 3 次元多様体，軌道体が通約可能であるかどうか判定する方法を見つけよ．

2 つの数論的双曲 3 次元多様体（代数的に定義されたもの）が通約可能かどうかは簡単にわかるので，非数論的なものだけを考えればよい．

非数論的双曲 3 次元多様体 M に対して commensurator 軌道体 $C(M)$ という M と通約可能な双曲 3 次元多様体，軌道体で体積が最小のものが存在することが証明されていて，**完全通約可能性類不変量**となる．

非コンパクト双曲 3 次元多様体に対しては，Epstein-Penner 分割と言われる，ある理想的多面体分割を用いて $C(M)$ を求めることができる．

上記の問題 1 は以下のようになる．

問題 2 与えられたコンパクト非数論的双曲 3 次元多様体 M の *commensurator* 軌道体 $C(M)$ を決定せよ．

この問題に対して応募者は，三角柱やロベル多面体と呼ばれるコンパクト多面体の各面に関する鏡映変換で生成される非数論的コクセター群の commensurators を決定した．手法は面角の情報だけで簡単に計算できるものであり，他の多くのコクセター群についても同様に commensurator を計算できると見込まれる．

今後は一般のコンパクト双曲 3 次元多様体についても同様の計算方法がないか調べて，問題 2 の完全解決を目指していきたい．

双曲 3 次元軌道体で体積が最小のもの，2 番目に小さいものは決定されているが数論的である．非数論的双曲 3 次元多様体の commensurator 軌道体というのは体積が小さいものなので，多くの例を計算することでを，非数論的双曲 3 次元軌道体の体積を決定するのに役立つと思われる．

また，Johnson，Kellerhals，Ratcliffe らによって，$n(\geq 4)$ 次元のコクセター群についても研究されている．3 次元のコクセター群の commensurator の計算方法を用いて高次元のコクセター群の commensurators の計算もできるのではないかと思われる．