Date . . . No.

教科書 問13.1 $\mathbb{R}^n$のノルムに関して、三角不等式が成り立つことを示せ

[解] $x, y \in \mathbb{R}^n$とする。このとき一般に対称性と線形性が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
&= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \\
&= \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leqq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

が成立する。

この不等式にコーシー・シュワルツの不等式（証明は別紙参照）を適用すると、

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &\leqq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

が成り立つことが分かる。

ここで $\|x\| \geqq 0$, $\|y\| \geqq 0$ より $\|x\| + \|y\| \geqq 0$, $\|x+y\| \geqq 0$ であることから $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ となる。

したがって $\mathbb{R}^n$のノルムに関して三角不等式が成り立つ。//

Date . . . No.

(別紙) コーシー・シュワルツの不等式($|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\| \|y\|$)の証明

[解] $0 \leqq \Big\langle \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y \ , \ \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y \Big\rangle$

$= \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2$
$\qquad - \langle x, y\rangle \langle y, y\rangle \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle^2 \langle y, y\rangle$

$= \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2$
$\qquad - \langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2 + \langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2$

$= \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2$

よって $\langle y, y\rangle \langle x, y\rangle^2 \leqq \langle y, y\rangle^2 \langle x, x\rangle$

$y \neq \mathbb{0}$ のとき、$\langle y, y\rangle \neq \mathbb{0}$ であるので $|\langle x, y\rangle|^2 \leqq \|x\|^2 \|y\|^2$ となる。

ノルムの正値性より、$|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\| \|y\|$ が成り立つ。

一方、$y = \mathbb{0}$ のときも等号が成立する。

以上より、コーシー・シュワルツの不等式が成り立つ。//