位相数学１演習 問１４－２（教科書）

山口創大

2024 年 4 月 23 日

問 14-2　$a \in \boldsymbol{R}$について, $(a, +\infty)$は$\boldsymbol{R}$の開集合であることを示せ.

証明
$(a, +\infty)$内の任意の点が$(a, +\infty)$の内点であることを示す.
$\forall x \in (a, +\infty)$をとる.
区間の定義より, $x > a$である.
ここで, $\epsilon_x := \frac{|x-a|}{2}$とすると$\epsilon_x = \frac{x-a}{2} > 0 (\because x > a)$
このとき

$$
\begin{aligned}
B(x; \epsilon_x) &= (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \\
&= (\frac{x+a}{2}, \frac{3x-a}{2})
\end{aligned}
$$

上記のxのϵ_x近傍について,
$\frac{x+a}{2} - a = \frac{x-a}{2} > 0$より
$\frac{x+a}{2} > a$
また,
$\frac{3x-a}{2} < +\infty$
なので, $B(x; \epsilon_x) \subset (a, +\infty)$ を満たしている.
従って、$(a, +\infty)$は$\boldsymbol{R}$上の開集合.(証明終)