問 15.2

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とする.

左半開区間 (a,b] は $\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ.

(開集合ではないこと)

$\forall \epsilon > 0$ をとる.

$B(b;\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} | b - \epsilon < x < b + \epsilon\}$ なので、

$y := \frac{2b+\epsilon}{b}$ とすると、$y \in B(b;\epsilon)$

また、$b < y < b + \epsilon$ より、$y \notin (a, b]$

よって、$B(b;\epsilon) \not\subset (a, b]$ が成り立つ.

つまり、$b \in (a, b]$ は、(a,b] の内点ではないので、(a,b] は開集合ではない.

(閉集合ではないこと)

(1)$(a, b]^i = (a, b)$ の証明

$\forall x \in$ (a,b) をとる

$\epsilon := min\,\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\}$ とすると、$B(x;\epsilon) \subset (a, b)$

したがって、$x \in (a, b)$ は (a,b] の内点である

$\forall \epsilon' > 0$ をとる

$B(b;\epsilon') = \{x \in \mathbb{R} | b - \epsilon' < x < b + \epsilon'\}$ なので

$x' := \frac{2b+\epsilon'}{2}$ とおくと、$x' \in B(b;\epsilon')$

また、$b < x' < b + \epsilon'$ より、$x' \notin (a, b]$

よって、$B(b;\epsilon') \not\subset (a, b]$ が成り立つ.

つまり、$b \in (a, b]$ は、(a,b] の内点ではないので、

以上より、$(a, b]^i = (a, b)$

(2)$\partial(a, b] = \{a, b\}$ の証明

$\forall \epsilon > 0$ をとる

$x := \frac{a+min\,\{a+\epsilon,b\}}{2}$ とすると、 $a < x - \epsilon < x < x + \epsilon < b$ となる.

よって、$x \in B(x;\epsilon)$ かつ $x \in (a, b]$ なので、$B(a;\epsilon) \cap (a, b] \neq \emptyset$

$a \notin (a, b]$ より、$a \in (a, b]^c$

また、$a \in B(a;\epsilon)$ なので、$B(a;\epsilon) \cap (a, b]^c \neq \emptyset$

$b \in (a, b]$ かつ $b \in B(b;\epsilon)$ より、$B(b;\epsilon) \cap (a, b] \neq \emptyset$

$y := \frac{2b+\epsilon}{2}$ とすると、$b < y < b + \epsilon$ となる.

よって、$y \in B(b;\epsilon)$ かつ $y \notin (a, b]$ なので、$B(b;\epsilon) \cap (a, b]^c \neq \emptyset$

(1) より、(a,b) の各点は (a,b] の内点であるから、(a,b) の各点は (a,b] の境界点ではない.

また、$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ の任意の点 x に対して、

$\epsilon := min(|x - a|, |x - b|)$ とすると、$\epsilon > 0$ である.

そして、$B(x;\epsilon) \subset \{(-\infty, a) \cup (b, \infty)\}$ が成り立つので、

$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ の各点は (a,b] の外点であるので、(a,b] の境界点ではない.

以上より、$\partial(a, b] = \{a, b\}$

(1),(2) より、$\overline{(a, b]} = (a, b]^i \cup \partial(a, b] = [a, b]$

$a \in [a, b]$ かつ $a \notin (a, b]$ より、$\overline{(a, b]} = [a, b] \neq (a, b]$ であるから、$(a, b]$ は自身の閉包と一致しない.

すなわち、(a,b] は閉集合ではない.$\square$