

問17.3 X は距離空間 ε 对 ε . X は X の開集合でも閉集合でもある。

● X は開集合

$\forall a \in X \exists \varepsilon > 0$. $\varepsilon := \{ \varepsilon > 0 \}$. $B(a; \varepsilon) \subset X$ 对. X は X の開集合.

● X は閉集合 $\Leftrightarrow X^c (= \emptyset)$ は開集合

$\forall a \in \emptyset, \exists \varepsilon > 0$ st. $B(a; \varepsilon) \subset \emptyset$ と言えない.

$\forall a (a \in \emptyset \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ st. $B(a; \varepsilon) \subset \emptyset)$ — (*)

空集合 \emptyset 对 \emptyset の元が存在しないので $a \in \emptyset$ は偽. \therefore (*) は真.

すなわち \emptyset は X の開集合

$X \setminus X = \emptyset$ 对. \emptyset は X の開集合であるので. 閉集合の定義

对. X は X の閉集合 \square