$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ $((x, y) \in X \times X)$

d' が三角不等式をみたすことを示せ。

[解答] $x, y, z \in X$ に対して以下の3つの場合について考える。

(i) $d(x, y) < 1$ かつ $d(y, z) < 1$ のとき

このとき、$d'(x, y) = d(x, y)$, $d'(y, z) = d(y, z)$ である。

また、$d(x, z) < 1$, $d(x, z) \geq 1$ のいずれの場合においても

d' の定義から $d'(x, z) \leq d(x, z)$

よって、
$$\begin{aligned} d'(x, z) &\leq d(x, z) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) = d'(x, y) + d'(y, z) \end{aligned}$$

(ii) $d(x, y) \geq 1$ のとき

このとき、$d'(x, y) = 1$ である。

また、$d(x, z) < 1$, $d(x, z) \geq 1$ のいずれの場合においても

d' の定義から $d'(x, z) \leq 1$

よって、$d'(x, z) \leq 1 \leq 1 + d'(y, z) = d'(x, y) + d'(y, z)$

d' の正値性はすでに問題文により認められている。

(iii) $d(y, z) \geq 1$ のとき

このときも (ii) のときと同様に $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$ が示せる。

(i) 〜 (iii) より、$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$ が成り立つため、

d' は三角不等式をみたす。 □