位相数学I　AHA23010 石野 優生

問18.2

(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間、$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ の写像とし、
f が a で連続、g が $f(a)$ で連続とすると
$g \circ f$ が a で連続であることを示せ。

g が $f(a)$ で連続だから

$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \delta_1 > 0$ s.t. $\forall y \in Y,\ d_Y(y, f(a)) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(g(y), g(f(a))) < \varepsilon_1$

また f は a で連続だから

$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists \delta_2 > 0$ s.t. $\forall x \in X$ $\quad d_X(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon_2$

ここで $\delta_1 > 0$ より $\varepsilon_2 := \delta_1$ とすると
$d_Y(f(x), f(a)) < \delta_1$ とできる

また $y := f(x)$ とすると

$d_X(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d_Z(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon_1$

$d_X(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d_Z(g \circ f(x), g \circ f(a)) < \varepsilon_1$

したがって $\delta := \delta_2$ とすると

$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in X,\ d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Z(g \circ f(x), g \circ f(a)) < \varepsilon_1$

が成り立つので $g \circ f$ は a で連続である