問 18.4 有界閉区間 $[0,1]$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分距離空間となる。特に、$\mathbb{R}$ ので定義された実数値連続関数全体の集合を $C[0,1]$ と表す。このとき、実数値関数 $d : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ を

$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$

により定める。

(1)d が $C[0,1]$ の距離となることを示せ。

(i)$\forall f,g \in C[0,1]$ をとる。$0 \leq |f(x) - g(x)|$ により

両辺を $[0,1]$ 上で積分すると $0 = \int_0^1 0\mathrm{dx} \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$ より $\mathrm{d(f,g)} \geq 0$

$f = g$ ならば $|f(x) - f(x)| = 0$ により $d(f,g) = 0$

逆に $d(f,g) = 0$ で $f \neq g$ を仮定する。

このとき、$\exists c \in [0,1] s.t. |f(c) - g(c)| > 0$ となるので $|f(c) - g(c)| = \mathrm{M}(> 0)$ とおく。

また f, g : 連続より $f - g$ も連続で $|f - g|$ も連続である。

故に $|f - g|$ の連続性から

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 s.t. \forall x \in [0,1], |x - c| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - g(x)| - |f(c) - g(c)|| < \epsilon$

このとき$\epsilon = \frac{\mathrm{M}}{2}(> 0)$ とおくと $c - \delta \leq x \leq c + \delta$の範囲では

$\frac{\mathrm{M}}{2} \leq |f(x) - g(x)| \leq \frac{3\mathrm{M}}{2}$すなわち$\frac{\mathrm{M}}{2} \leq |f(x) - g(x)|$ である。

ここから

$(a1)[c - \delta, c + \delta] \subset [0,1]$ のとき

$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} = \int_0^{c-\delta} |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} + \int_{c+\delta}^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx}$

$\geq \int_0^{c-\delta} 0\mathrm{dx} + 2\delta \times \frac{\mathrm{M}}{2} + \int_{c+\delta}^1 0\mathrm{dx} = \mathrm{M}\delta > 0$

$(a2)c - \delta < 0$ のとき

$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} = \int_0^{c+\delta} |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} + \int_{c+\delta}^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} > \delta \times \frac{\mathrm{M}}{2} + 0 = \frac{\delta\mathrm{M}}{2} > 0$

$(a3)c + \delta > 1$ のとき

$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} = \int_0^{c-\delta} |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} + \int_{c-\delta}^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} > 0 + \delta \times \frac{\mathrm{M}}{2} = \frac{\delta\mathrm{M}}{2} > 0$

以上により仮定と矛盾するので $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$

(ii)$\forall f,g \in C[0,1]$ に対して

$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{dx} = \int_0^1 |g(x) - f(x)|\mathrm{dx} = d(g,f)$ により $d(f,g) = d(g,f)$

(iii)$\forall f,g,h \in C[0,1]$ に対して

$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ すなわち

$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ 両辺を $[0,1]$ で積分すると

$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{dx} \leq \int_0^1 |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\mathrm{dx} = \int_0^1 |f(x)-h(x)|\mathrm{dx}+\int_0^1 |h(x)-g(x)|\mathrm{dx}$

すなわち $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$

(i)(ii)(iii) により d は距離 (関数)

(2)実数値関数$\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ を

$\phi(f) = f(1)(f \in C[0,1])$

により定める。$C[0,1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$を

$f_n(x) = x^n(x \in [0,1])$

により定め、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$および $\{\phi(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$の極限を調べることにより$\phi$は連続でないことを示せ。

$f_n(x)$ と定数関数 0 の距離を求める。$d(f_n, 0) = \int_0^1 |x^n - 0|\mathrm{dx} = \int_0^1 x^n \mathrm{dx} = \frac{1}{n+1}$
ここで $\forall \epsilon^{'} > 0$ に対して $N + 1 > \frac{1}{\epsilon}$となるように $N \in \mathbb{N}$ をとると
$\forall n \in \mathbb{N} s.t. n \geq N, \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{n+1} = |\frac{1}{n+1} - 0| < \epsilon^{'}$により
$d(f_n, 0)$ は 0 に収束する。距離の定義から $\lim_{n\to\infty} f_n = 0 - (*)$ となる。
一方で$\phi(f_n) = 1^n = 1, \phi(0) = 0$ である。$- (@)$

$(\epsilon - \delta$で示す) ここで$\epsilon = \frac{1}{2}$と $\forall \delta > 0$ をとる。
このとき $(*)$ より、$\exists N s.t. \quad n \geq N \Rightarrow |f_n - 0| < \delta, |\phi(f_n) - \phi(0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$
となるのでϕは不連続

(開集合の逆像で示す)$\mathbb{R}$ の開集合として開区間 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ をとる。
このとき$\phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ とは
$-\frac{1}{2} < f(1) < \frac{1}{2}$となるような $C[0,1]$ の元 f の全体である。
したがって $0 \in \phi^{-1}((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}))$
ここで$\phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ が開集合であると仮定する。
このとき $(*)$ の議論により $\forall \epsilon_0 > 0$ に対して
N 以上の任意の自然数 n を取れば、$f_n \in B(0, \epsilon_0)$
一方で $(@)$ により、$f_n \notin \phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$
すなわち $\forall \epsilon_0 > 0, \Rightarrow B(0, \epsilon_0) \not\subset \phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$
これは$\phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ が開集合であることに矛盾なので
$\phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ は開集合ではない。
したがって、ある開集合に対してその逆像が開集合とならないものが存在するのでϕは不連続