Date

位相数学1演習　AHA23045　千葉 虎絃

問19.3　$(a,b)^e=[a,b]^e=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$　$(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$

$X^e=(X^c)^i$ に注意する

$\mathbb{R}-(a,b)=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ より、$x\in\mathbb{R}-(a,b)$ をとると、

$x<a$ のとき、$\exists\varepsilon':=\frac{a-x}{2}>0$ s.t. $B(x;\varepsilon')\subset\mathbb{R}-(a,b)$ より、

x は $\mathbb{R}-(a,b)$ の内点である

$x>b$ のとき、$\exists\varepsilon'':=\frac{x-b}{2}>0$ s.t. $B(x;\varepsilon'')\subset\mathbb{R}-(a,b)$ より、

x は $\mathbb{R}-(a,b)$ の内点である

$x=a$ のとき、$0<\varepsilon<b-a$ のとき $B(a;\varepsilon)\cap(a,b)=(a,a+\varepsilon)$

$B(a;\varepsilon)\cap(a,b)^c=(a-\varepsilon,a]$

$\varepsilon=b-a$ のとき $B(a;\varepsilon)\cap(a,b)=(a,b)$

$B(a;\varepsilon)\cap(a,b)^c=(a-\varepsilon,a]$

$b-a<\varepsilon$ のとき $B(a;\varepsilon)\cap(a,b)=(a,b)$

$B(a;\varepsilon)\cap(a,b)^c=(a-\varepsilon,a]\cup[b,a+\varepsilon)$

よって、$\forall\varepsilon>0$, $B(a;\varepsilon)\cap(a,b)\neq\emptyset$ かつ $B(a;\varepsilon)\cap(a,b)^c\neq\emptyset$ となり、

$x=a$ は $\mathbb{R}-(a,b)$ の境界点で、$\mathbb{R}-(a,b)$ の内点ではない、

$\mathbb{R}-(a,b)$ の内点は (a,b) の外点であるので、

$(a,b)^e=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ ―①

次に、$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ で、開集合の和集合は開集合 ―(※)

なので、$\forall x\in\mathbb{R}-[a,b]$ は $\mathbb{R}-[a,b]$ の内点である（$\because$ $\mathbb{R}-[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の開集合）

よって、x は $[a,b]$ の外点である

ゆえに、$[a,b]^e=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ ―②

①、② より、$(a,b)^e=[a,b]^e=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ //

(※) 開集合の和集合は開集合であることを証明する

$\forall\lambda\in\Lambda$, $O_\lambda\in\mathfrak{O}$ をとる

$\forall x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ をとる

$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ より、$\exists\lambda_0\in\Lambda$ s.t. $x\in O_{\lambda_0}$

$O_{\lambda_0}\in\mathfrak{O}$ より、$\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\subset O_{\lambda_0}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$

ゆえに、$\forall x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$, $\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$

したがって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ は開集合 //