

# 位相数学演習問題19,4解答

## AHA23034 野村尚平

問題19,4 以下を示せ。

$$(1) (A \cap B)^i = A^i \cap B^i$$

$$(2) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(解)

(1)

(i)  $(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$  を示す

$\forall a \in (A \cap B)^i$  をとる

このとき  $B(a; \varepsilon) \subset A \cap B$  となる  $\varepsilon > 0$  がとれる

すなわち  $B(a; \varepsilon) \subset A$  かつ  $B(a; \varepsilon) \subset B$

$B(a; \varepsilon) \subset A$  より  $a \in A^i$

$B(a; \varepsilon) \subset B$  より  $a \in B^i$

よって  $a \in A^i$  かつ  $a \in B^i$

したがって  $a \in A^i \cap B^i$

$\therefore (A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$

(ii)  $(A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i$  を示す

$\forall b \in A^i \cap B^i$  をとる

このとき  $b \in A^i$  かつ  $b \in B^i$  である

$b \in A^i$  より  $B(b; \varepsilon') \subset A$  となる  $\varepsilon' > 0$  がとれる

$b \in B^i$  より  $B(b; \varepsilon'') \subset B$  となる  $\varepsilon'' > 0$  がとれる

ここで  $\varepsilon''' := \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$  ととると  $\varepsilon''' > 0$

このとき  $B(b; \varepsilon''') \subset A \cap B$

すなわち  $b \in (A \cap B)^i$

$\therefore (A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i$

以上 (i), (ii) より  $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$  ■

(2)

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \left( (A \cup B)^c \right)^c \\ &= \left( (A^c \cap B^c)^i \right)^c \quad (\because \text{ド・モルガンの法則}) \\ &= \left( (A^c)^i \cap (B^c)^i \right)^c \quad (\because (1)) \\ &= \left( (A^c)^i \right)^c \cup \left( (B^c)^i \right)^c \quad (\because \text{ド・モルガンの法則}) \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \quad \blacksquare\end{aligned}$$