問 1.3 $f(x)=\mathrm{sinx}$ において、閉区間 $I=(c,d)$ の f による逆像 $f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか、c,d の値の範囲で場合分けして、答えよ

なお、以下では $I=(c,d)$ で表していることから,$c<d$ として扱う

(1)$c\geq 1$ または $d\leq -1$ のとき
$-1\leq \mathrm{sinx}\leq 1$ かつ $I\cap[-1,1]=\varnothing$ より
$f^{-1}(I)=\varnothing$

(2)$c<-1$ かつ、$d>1$ のとき
$I\supset[-1,1](\mathrm{sinx}$ の値域$)$ より
$f^{-1}(I)$ は x の変域全体
すなわち、$f^{-1}(I)=(-\infty,\infty)$

(3)$-1\leq c<1$ かつ $1<d$ のとき
$\sin(\theta+2\mathrm{n}\pi)=c(n\in\mathbb{Z})$ であるとすると $n=0$ とすればθ $=\mathrm{Sin}^{-1}c$ と書ける
$x=0$ に近い $f^{-1}(I)$ の範囲の一塊 (以下 $(*)$ で書く) を $Sin^{-1}c$ などを用いて表し、その範囲に $2n\pi$ を加えることで全ての範囲を表現可能となり、その全ての和集合を取れば $f^{-1}(I)$ を表せるので、以下 (3), (4), (5) ではその手法を用いる
このとき、$(*)=(\theta,\pi-\theta)=(\mathrm{Sin}^{-1}c,\pi-\mathrm{Sin}^{-1}c)$
よって $f^{-1}(I)$ の全ての範囲は $(2\mathrm{n}\pi+\mathrm{Sin}^{-1}c,(2\mathrm{n}+1)\pi-\mathrm{Sin}^{-1}c)$
$f^{-1}(I)$ は上式の n に関する和集合全体なので
$f^{-1}(I)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(2\mathrm{n}\pi+\mathrm{Sin}^{-1}c,(2\mathrm{n}+1)\pi-\mathrm{Sin}^{-1}c)$

(4)$c<-1$ かつ $-1<d\leq<1$ のとき
$\sin(\theta_0+2\mathrm{n}\pi)=d(n\in\mathbb{Z})$ であるとすると、$n=0$ とすればθ$_0=\mathrm{Sin}^{-1}d$ と書ける
このとき、$(*)=(-\pi-\theta_0,\theta_0)=(-\pi-\mathrm{Sin}^{-1}d,\mathrm{Sin}^{-1}d)$
よって $f^{-1}(I)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}((2\mathrm{n}-1)\pi-\mathrm{Sin}^{-1}d,2\mathrm{n}\pi+\mathrm{Sin}^{-1}d)$

(5)$-1\leq c<d\leq 1$ のとき
$\sin(\theta_1+2\mathrm{n}\pi)=d,\sin(\theta_2+2\mathrm{n}\pi)=c(n\in\mathbb{Z})$ であるとすると、$n=0$ とすれば、θ$_1=\mathrm{Sin}^{-1}d$, θ$_2=\mathrm{Sin}^{-1}c$ と書ける
$(*)=(\theta_2,\theta_1)\cup(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2)=(\mathrm{Sin}^{-1}c,\mathrm{Sin}^{-1}d)\cup(\pi-\mathrm{Sin}^{-1}d,\pi-\mathrm{Sin}^{-1}c)$
よって $f^{-1}(I)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{(2\mathrm{n}\pi+\mathrm{Sin}^{-1}\mathrm{c},2\mathrm{n}\pi+\mathrm{Sin}^{-1}\mathrm{d})\cup((2\mathrm{n}+1)\pi-\mathrm{Sin}^{-1}\mathrm{d},(2\mathrm{n}+1)\pi-\mathrm{Sin}^{-1}\mathrm{c})\}$