問 1.6

後呂 悠惟 (AHA23051)

2024 年 7 月 22 日

1 問題内容

$\mathbb{R}$ 全体で定義された, 連続ではない関数 $f(x) = x - [x]$ について, 次の問に答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 閉区間 $I = (c, d)$ の f による逆像 $f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか,c, d の値の範囲で場合分けして, 答えよ.

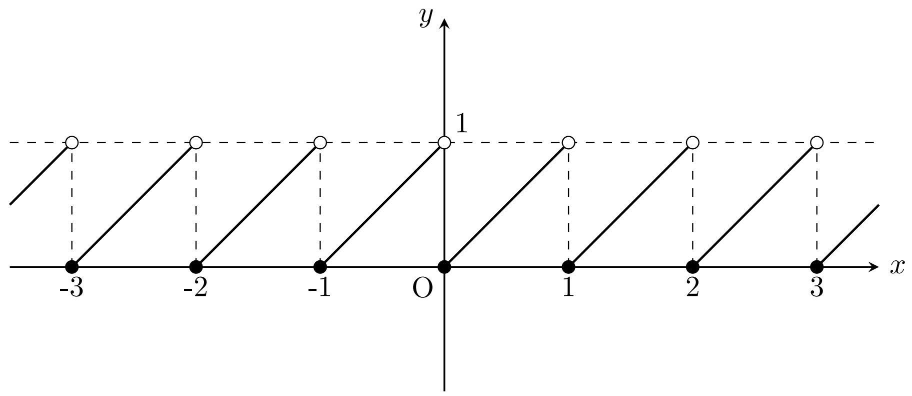
(3) (2) で,$f^{-1}(I)$ が開集合とならないのは, どの場合か答えよ.

2 回答

2.1 (1) の回答

$[x]$ は床関数で,x を超えない最大の整数, つまり x の整数部分を返す関数である.
一般に実数は (整数部分)+(小数部分) として書くことができる. つまり, $f(x) = x - [x]$ は x の小数部分を表している.

このことを踏まえてグラフの概形を書くと、



上図のようなグラフとなる.
よって、f は周期 1 の周期関数となる.

2.2 (2) の回答

$f|_{[0,1)} = \mathrm{id}_{[0,1)}$ で,f が周期 1 の周期関数であることから場合分けして考えると, 次のようになる:

$$f(I) = \begin{cases} \varnothing & \text{if } 1 \leq c \vee (c < 0 \wedge d \leq 0) & \cdots ① \\ \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (c+n, \min(1,d)+n) & \text{if } 0 \leq c < 1 & \cdots ② \\ \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, d+n) & \text{if } c < 0 \wedge 0 < d < 1 & \cdots ③ \\ \mathbb{R} & \text{if } c < 0 \wedge 1 \leq d & \cdots ④ \end{cases}$$

2.3 (3) の回答

③のとき, かつそのときに限り $f^{-1}(I)$ は開集合にならないことを示す.

- ①のとき, つまり $\varnothing$ は全体集合の補集合であるため開集合かつ閉集合である.
- ②のとき, つまり $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(c+n, \min(1,d)+n)$ は開区間 (つまり開集合) の無限個の和集合であるため開集合である.
- ④のとき, つまり $\mathbb{R}$ は全体集合であるため開集合かつ閉集合である.

よって,③のとき以外は開集合になる.

さて,③のとき開集合でないことを示せばよい.

$0 < d < 1$ で,$0 \in \mathbb{R}$ が $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, d+n)$ の内点でない, つまり任意の $\epsilon > 0$ に対し $B_\epsilon(0) \cap X^c \neq \varnothing$ を示す.

$X^c = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[d+n, n+1)$ である. $x := -\frac{\min(1-d,\epsilon)}{2}$ とすると,$d-1 < x < 0$ より $x \in X^c$.
また,$|x-0| = \frac{\min(1-d,\epsilon)}{2} \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$ より $x \in B_\epsilon(0)$.
したがって,$x \in B_\epsilon(0) \cap X^c \neq \varnothing$ より,0 は X の元であるが内点ではない, よって $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, d+n)$ は開集合ではない.