問 25.3

AHA23007　木下翔太

問題

(1) $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の連結部分集合からなる集合族とし, $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく.

任意の λ, $\mu \in \Lambda$ に対して, $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ ならば, A は連結であることを示せ.

(2) 弧状連結空間は連結であることを示せ.

解答

(1) $\lambda_0 \in \Lambda$ と $x_0 \in A_{\lambda_0}$ を取り, 固定する.

連続写像 $f : A \to \{0,1\}$ に対して, $f(x_0) = 0$ とする.

$A_{\lambda_0} \subset A$ より, f の A_{λ_0} への制限 $f|_{A_{\lambda_0}}$ は連続である.

A_{λ_0} は連結なので, $f|_{A_{\lambda_0}}$ は定値写像である.

故に, 任意の $x \in A_{\lambda_0}$ に対して, $f(x) = f(x_0) = 0$ が成り立つ.

任意の $\mu \in \Lambda$ を取る.

$A_{\lambda_0} \cap A_\mu \neq \emptyset$ より, $x_1 \in A_{\lambda_0} \cap A_\mu$ を取り, 固定する.

$A_\mu \subset A$ より, f の A_μ による制限 $f|A_\mu$ は連続である.

A_μ は連結なので, $f|_{A_\mu}$ は定値関数である.

故に, 任意の $x' \in A_\mu$ に対して, $f(x') = f(x_1) = 0$ が成り立つ.

ここで, 任意の $x'' \in A$ を取ると $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より,

$x'' \in A_{\mu_0} \subset A$ となる $\mu_0 \in \Lambda$ が存在する.

従って, $f(x'') = 0$.

よって, f は定値写像である.

以上より, A は連結である □

(2) X を弧状連結空間とすると, X は弧状連結.

$x_0 \in X$ を取り, 固定して, 任意の $x \in X$ を取ると,

$f_x(0) = x_0$かつ $f_x(1) = x$ を満たす連続写像 $f_x : [0,1] \to X$ が取れる.

$[0,1]$ は連結なので, $f_x([0,1])$ も連結である.

ここで, $X = \bigcup_{x\in X} f_x([0,1])$ であるから, (1) を用いて,

X は連結である □