位相数学 1 演習　教科書 26.5

AHA23005　板倉 洸基

(1)位相空間$(X,\mathfrak{O})$が完全不連結$\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}\forall A\subset X$: 連結, $|A|=1$

(2)$prop.\ \mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ は完全不連結

$pf.\ \forall A\subset\mathbb{Q}(|A|\geq 2), \exists B,C\subset A(B\neq\emptyset, C\neq\emptyset, B,C: open)$

$s.t.\ (B\cup C=A)\wedge(B\cap C=\emptyset)$を示す。

$\forall A\subset\mathbb{Q}(|A|\geq 2)$をとると、

$|A|\geq 2$ より、$\exists a,b\in A(a<b)$

ここで、$\dfrac{2}{b-a}$以上で最小の整数をmとすると、

$a<b$より、$b-a>0$ だから、$\dfrac{2}{b-a}>0$ より、$m\geq 1$ なので、

$0\leq m-1<\dfrac{2}{b-a}\leq m$

$\therefore 0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{b-a}{2}$

また、$\forall p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ をとり、pを超える最小の整数をnとすると、

$p\notin\mathbb{Q}$ より、$p\notin\mathbb{Z}$ だから、$0<p-n<1$

$\therefore 0<\dfrac{p-n}{m}<\dfrac{b-a}{2}$

$\therefore \dfrac{a-b}{2}<\dfrac{p-n}{m}<\dfrac{b-a}{2}$

$\therefore a<\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{p-n}{m}<b$

ここで、$r\coloneqq\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{p-n}{m}$とすると、

$a,b,m,n,2\in\mathbb{Q}, p\notin\mathbb{Q}$ より、$r\notin\mathbb{Q}$ で、$a<r<b$である。

ここで、$B\coloneqq\{x\in A\mid x\leq r\}, C\coloneqq\{x\in A\mid x\geq r\}$とすると、

$a\in B, b\in C$より、$B\neq\emptyset, C\neq\emptyset$であり、

$r\notin\mathbb{Q}\supset A$より、$r\notin A$だから、

$B=\{x\in A\mid x<r\}=A\cap(-\infty,r)$,

$C=\{x\in A\mid x>r\}=A\cap(r,+\infty)$となり、

B,CはAの開集合である。

また、$B\cup C=\{x\in A\mid(x\leq r)\vee(x\geq r)\}=\{x\in A\mid x\in\mathbb{R}\}=A$で、

$B\cap C=\{x\in A\mid(x<r)\wedge(x>r)\}=\emptyset$となる。

以上より、Aは連結でない。

即ち、$\mathbb{Q}$ は完全不連結である。■