問 27.1(2)

(解答)

X が有限集合のとき, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ とする。

X の任意の開被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ をとると, $x_1,x_2,...,x_n\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ より

$^\exists\lambda_1,...,\lambda_n\in\Lambda \quad s.t \quad x_1\in U_{\lambda_1},...,x_n\in U_{\lambda_n}$ とできる。

このとき, $X=\{x_1,...,x_n\}\subset\bigcup_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n}U_\lambda$ なので, X はコンパクト。

X が無限集合のとき, X は離散位相空間なので

$^\forall x\in X$ に対して $\{x\}$ は X の開集合。このとき $\bigcup_{x\in X}\{x\}$ は X の開被覆。

ここで, X: コンパクトと仮定すると, $X\subset\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i\}$ とできる。

X は有限集合の部分集合なので有限集合となるが, これは X が無限集合であることに矛盾。

よって X はコンパクトでない。□