No

Date

問 27.4.

コンパクト空間の空でない閉集合はコンパクトであることを示す。

Xをコンパクト空間とし，AをXの空でない閉集合とする。

$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆とする。

$X-A$ は X の開集合だから

$(X-A)\cup(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である。

Xはコンパクトであるから，

$(X-A)\cup(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限部分被覆をもつ。

また，$(X-A)$ と A の共通部分は無いので，

ある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X=(X-A)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}\right)$$

これより，

$$\begin{aligned}A&=A\cap X\\&=A\cap\left((X-A)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}\right)\right)\\&=(A\cap(X-A))\cup\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}\right)\right)\\&=A\cap\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}\end{aligned}$$

よって $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}$ となるから有限部分被覆がとれる。

したがって Aはコンパクト。

すなわち，コンパクト空間の空でない閉集合はコンパクト。