29.1

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C(X)$ のコーシー列より

$\forall \varepsilon > 0$ に対し x に依存しない $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し

$m, n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成立する.

また f が $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各点収束極限であることより

$\forall x \in X, \exists n_1 = n_1(x, \varepsilon)$ s.t. $m \geq n_1 \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

ここで $m = \max(n_0, n_1)$ とすると

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ となるため

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall x \in X, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が

成立するため定義より $d(f_n, f) < \varepsilon$ となる

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する.