**問 29.5**　$X$を距離空間、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を$X$のコーシー列とし、$a \in X$とする。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$のある部分列が$a$に収束するならば、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$a$に収束することを示せ。

∵ ) $d$：X の距離、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$：$a$に収束する$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列とする。

$^{\forall}\varepsilon > 0$ とおく。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はコーシー列であるので、

$$^{\exists}N \in \mathbb{N}\ s.t.\ ^{\forall}m \in \mathbb{N}, m \geq N, ^{\forall}n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

また、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$は $a$に収束するので、

$$^{\exists}K \in \mathbb{N}\ s.t.\ ^{\forall}k \in \mathbb{N}, k \geq K \Rightarrow d\left(a_{n_k}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、$^{\forall}n \in \mathbb{N}, n \geq N$とし、$^{\exists}k \in \mathbb{N}\ s.t.\ n_k \geq N$であるので、$m = n_k$とすると、

$$\begin{aligned} d(a_n, a) &\leq d\left(a_n, a_{n_k}\right) + d\left(a_{n_k}, a\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

したがって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$a$に収束する。

■