問 2.10

後呂 悠惟 (AHA23051)

2024 年 7 月 22 日

1　問題内容

任意の $X \subset \mathbb{R}^n$ に対して,$\overline{X^i} \subset \overline{X}$ は常に成り立つ. この包含関係において, 等号が成り立たない, すなわち $\overline{X^i} \neq \overline{X}$ となるような X の例を挙げ, その理由も述べよ.

2　回答

$X = \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき,

$$\begin{cases} X^i = \varnothing & \cdots ① \\ \overline{X} = \{\mathbf{0}\} & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つことを示す.

2.1　①の証明

任意の X の点が内点でないことを示す.

任意の $\mathbf{x} \in X$ と任意の $\epsilon > 0$ をとる. すると,$X = \{\mathbf{0}\}$ より $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
このとき,$\mathbf{y} \coloneqq (\frac{\epsilon}{2}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}$ とすると, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ より $\mathbf{y} \in X^c$.
また,$||\mathbf{y} - \mathbf{0}|| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ より $\mathbf{y} \in B_\epsilon(\mathbf{x})$.
以上より,$\mathbf{y} \in B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X^c \neq \varnothing$. よって,$\mathbf{x}$ は X の内点でない. したがって,$X^i = \varnothing$.

2.2　②の証明

② は $\overline{X} = X$ であることを主張している. よって,X が閉集合, つまり $X^c = \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ が開集合であることを示せばよい.
X^c の任意の点が内点であることを示す.

任意の $\mathbf{x} \in X^c$ をとる.$\epsilon \coloneqq ||\mathbf{x}||$ とする.
このとき,$||\mathbf{0} - \mathbf{x}|| = \epsilon \not< \epsilon$ より $\mathbf{0} \notin B_\epsilon(\mathbf{x})$ となるから $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} = X^c$.
したがって,$\mathbf{x}$ は X^c の内点.$\mathbf{x}$ は任意であるため,X^c は開集合.
よって X は閉集合であるため,$\overline{X} = X = \{\mathbf{0}\}$.

2.3　$\overline{X^i} \neq \overline{X}$ の証明

①より $X^i = \varnothing$ で,$\varnothing$ は閉集合であるから $\overline{X^i} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. ②より $\overline{X} = \{\mathbf{0}\}$.
よって,$\overline{X^i} = \varnothing \neq \{\mathbf{0}\} = \overline{X}$.
つまり,$X = \{\mathbf{0}\}$ は $\overline{X^i} \neq \overline{X}$ となるような X の例となっている.