位相数学１　演習　問 2.12

問題

$\mathbb{R}^n$において、$(O2),(O3)$ が成り立つことを、定義に戻って示せ。

参考

(O2) 有限個、無限個を問わず開集合の和集合は開集合

(O3) 有限個の開集合の共通部分は開集合

(解答)

(O2)

Proof.

$\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathfrak{O}$ をとる。$\forall \boldsymbol{a} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$をとる。

$\boldsymbol{a} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$より、ある$\lambda_0 \in \Lambda$が存在して、$\boldsymbol{a} \in O_{\lambda_0}$

O_{λ_0}は開集合であるから、ある$\varepsilon > 0$ が存在して、$B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$

つまり、任意の $\boldsymbol{a} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$に対して,$\boldsymbol{a}$ は$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$の内点であるから、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$は $\mathbb{R}^n$の開集合である。

よって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

□

(O3)

Proof.

$\forall n \in \mathbb{N}$ をとり、$O_1, O_2, \cdots, O_n \in \mathfrak{O}$ とする。

$\forall \boldsymbol{a} \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$をとる。

$\boldsymbol{a} \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$より、$\boldsymbol{a} \in O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$が成り立つ。

$O_1, O_2, \cdots, O_n$は開集合であるから、

各 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して、ある$\varepsilon_i > 0$ が存在して、$B(\boldsymbol{a};\varepsilon_i) \subset O_i$が成り立つ。

ここで、$\varepsilon := min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$

$B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \subset B(\boldsymbol{a};\varepsilon_i) \subset O_i(i = 1, \cdots, n)$ であるから、$B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$

つまり、任意の $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$に対して,$\boldsymbol{a}$ は $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$の内点であるから、$\bigcap_{i=1}^{n} O_i$は $\mathbb{R}^n$の開集合である。

よって、$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathfrak{O}$

□