Date . . No.

2-13

(A2) $A_\lambda \in \mathcal{A}$ ($\lambda \in \Lambda$) とする

$x \in \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ とすると 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$B(x;\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \neq \phi$ が成り立つ.

これより 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して

$B(x;\varepsilon)\cap A_\lambda \supset B(x;\varepsilon)\cap\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \neq \phi$ が成り立つ

したがって x は A_λ の外点でない

よって 任意の λ について

$x \in \overline{A_\lambda} = A_\lambda$ ($A_\lambda \in \mathcal{A}$) より

$x\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が成り立つ

よって $x\in\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \Rightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$

より $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が成り立つ

一方 一般に $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ が成り立つ

これらより

$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が成り立つ

定義より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は閉集合

(A3) $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{A}$、$x\in\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n}$ とする

すべての i ($i=1,\cdots,n$) について $x\notin A_i=\overline{A_i}$ と仮定すると

各 i に対して $B(x;\varepsilon_i)\cap A_i=\phi$ となる $\varepsilon_i>0$ が存在し

$\varepsilon := \min(\varepsilon_i)$ とおくと

すべての i に対して $B(x;\varepsilon)\cap A_i=\phi$ となる $\varepsilon>0$ が存在する

したがって $B(x;\varepsilon)\cap(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\phi$ となるが

$x\in\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n}$ であることに矛盾する

よって すべての i について $x\notin A_i=\overline{A_i}$ となる x は存在しないことから

$\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n}=A_1\cup\cdots\cup A_n$ が成り立つ

定義より $A_1\cup\cdots\cup A_n$ は閉集合