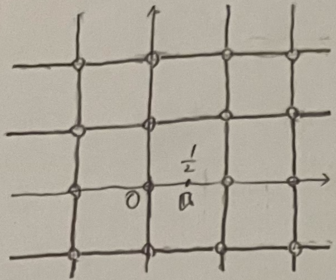
が $\mathbb{R}^2$ の開集合か否か



$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，次の3つの場合が考えられる．

(i) $x_1 \in \mathbb{Z}$ かつ $x_2 \in \mathbb{Z}$

(ii) $x_1 \in \mathbb{Z}$ かつ $x_2 \notin \mathbb{Z}$ または $x_1 \notin \mathbb{Z}$ かつ $x_2 \in \mathbb{Z}$

(iii) $x_1 \notin \mathbb{Z}$ かつ $x_2 \notin \mathbb{Z}$

この内 X に含まれるのは (ii) のときのみであるため，X は左の図の実線部分のようになる。

ここで，$\mathbf{a} := \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ とすると，$\mathbf{a} \in X$ であるが，$\forall \varepsilon > 0,\ B(\mathbf{a};\varepsilon) \not\subset X$ である。

（例えば，$\mathbf{b} := \left(\frac{1}{2}, \min\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right)\right)$ とおくと，
$\mathbf{b} \in B(\mathbf{a};\varepsilon)$ であるが，$\mathbf{b} \notin X$）

よって，「$\forall x \in X,\ \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset X$」が成り立たないため

X は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

□