問2.2 (d)

$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \mathbb{Q}$ または $x_2 \neq 0\}$

このとき、X は $\mathbb{R}^2$ の開集合か否か、定義に戻って示せ。

点 $a = (\alpha, 0)$ をとる。(α は無理数)

このとき、

$\alpha \notin \mathbb{Q}$ であるため、$a \in X$ である

ここで、

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界であると仮定すると、

$\mathbb{N} \neq \phi$ であるので、実数の連続性公理より、

$\mathbb{N}$ の上限 $p := \sup \mathbb{N}$ が存在する。

定義より、$m \in \mathbb{N}$ に対して、

$p-1 < m \leq p$ つまり、$p < m+1$ が成りたつ。

ここで、

$m+1 \in \mathbb{N}$ であるため、定義より、

$m+1 \leq p$ が成りたつが矛盾。

したがって、$\mathbb{N}$ は上に有界でないので、

${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n > \frac{1}{\varepsilon}$

${}^\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $m-1 \leq n\alpha < m$ がftそれぞれ成り立つ。

このとき、$n\varepsilon > 1$, $n\alpha < m \leq 1 + n\alpha$

となるより、$n\alpha < m \leq 1 + n\alpha < n\varepsilon + n\alpha = n(\alpha + \varepsilon)$

つまり、$n\alpha < m < n(\alpha+\varepsilon)$ が成立つ。

したがって、$\alpha < \frac{m}{n} < \alpha + \varepsilon$ となり、もちろん、$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ である。

$(\frac{m}{n}, 0) \in B(a; \varepsilon)$ であるが、$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ であるので、$(\frac{m}{n}, 0) \notin X$ したがって、$(\frac{m}{n}, 0) \in X^c$

$B(a; \varepsilon) \cap X^c \neq \phi$ つまり、$B(a; \varepsilon) \not\subset X$

したがって、点 $a \in X$ は X の内点でない。

以上より、X は $\mathbb{R}^2$ の開集合でないことが示された $\square$