

位相数学演習 問題2.5 解答

AHA23034 野村尚平

問2.5 定義に戻って $(X^i)^i = X^i$ を示せ。

(解)

(i) $(X^i)^i \subset X^i$ について

$\forall a \in (X^i)^i$ をとる

このとき $B(a; \varepsilon) \in X^i$ となる $\varepsilon > 0$ がとれる

よって $a \in X^i$

$\therefore (X^i)^i \subset X^i$

(ii) $(X^i)^i \supset X^i$ について

$\forall b \in X^i$ をとる

このとき $B(b; \varepsilon') \in X$ となる $\varepsilon' > 0$ がとれる

以下 $B(b; \varepsilon') \subset X \implies B(b; \varepsilon') \subset X^i$ を示す

$\forall b' \in B(b; \varepsilon')$ をとる

ここで $\varepsilon'' := \varepsilon' - d(b', b)$ とすると $\varepsilon'' > 0$

このとき $B(b'; \varepsilon'') \subset B(b; \varepsilon')$ を示す

$\forall b'' \in B(b'; \varepsilon'')$ をとると $d(b'', b') < \varepsilon''$

よって

$$d(b'', b) \leq d(b'', b') + d(b', b) < \varepsilon'' + d(b', b) = \varepsilon' - d(b', b) + d(b', b) = \varepsilon'$$

$\therefore b'' \in B(b; \varepsilon')$

したがって $B(b'; \varepsilon'') \subset B(b; \varepsilon')$

$B(b; \varepsilon') \subset X$ より $B(b'; \varepsilon'') \subset X$

よって $b' \in X^i$

したがって $B(b; \varepsilon') \subset X^i$

よって $b \in (X^i)^i$

$\therefore (X^i)^i \supset X^i$

(i), (ii) より $(X^i)^i = X^i$ ■