問 2.8　$X \subset Y$ のとき，$\overline{X} \subset \overline{Y}$ が成り立つことを示せ.

任意の $x \in \overline{X}$ をとる

1.　$x \in X$ のとき

$X \subset Y$ より　$x \in Y$ である。

また，$Y \subset \overline{Y}$ より　$x \in \overline{Y}$

2.　$x \notin X$ のとき

$X = X \setminus \{x\}$

$x \in \overline{X} = \overline{X \setminus \{x\}}$ となり，x は X の集積点である.

集積点の定義より

$\forall \varepsilon > 0,\ B(x;\varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$X \subset Y$ より $B(x;\varepsilon) \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

x は Y の集積点である。　よって　$x \in \overline{Y}$

1.2 より　$\forall x \in \overline{X}$ に対して　$x \in \overline{Y}$　である.

$\therefore$ $X \subset Y$ であるとき $\overline{X} \subset \overline{Y}$