問 2.9

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$ の点はすべて孤立点である. また,$\mathbb{Z}$ が境界点のみからなる閉集合である. このことを示せ.

解答

(i) $\mathbb{Z}$ のすべての元が孤立点であることを示す.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ をとる. $\epsilon := \dfrac{1}{2} > 0$ として,$B(n;\epsilon) = (n - \dfrac{1}{2}, n + \dfrac{1}{2})$ を考えると, これに含まれる整数は n のみ.

$\therefore B(n;\epsilon) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$

したがって,$\mathbb{Z}$ のすべての元が孤立点である.

(ii) $\mathbb{Z}$ のすべての元が境界点であることを示す.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ をとる. $\forall \epsilon > 0$ をとると, $n \in B(n;\epsilon) \cap \mathbb{Z}$ より,

$B(n;\epsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$

また x として,

$$x := \begin{cases} n + \frac{1}{\epsilon} & (\ \epsilon > 1\ ) \\ n + \frac{\epsilon}{2} & (0 < \epsilon \leq 1) \end{cases}$$

とすると,$x \in B(n;\epsilon) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$\therefore n$ は $\mathbb{Z}$ の境界点.

(iii) $\mathbb{Z}$ が閉集合 を示す. $\partial\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ すなわち,$(\partial\mathbb{Z})^c \supset \mathbb{Z}^c$ を示せばよい.

$\forall x \in \mathbb{Z}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ をとる.

$n := \lfloor x \rfloor$ とすると,$n \in \mathbb{Z}$

ここで,$\epsilon :=\min\{x - n, n + 1 - x\}$ とすると,

$n < x < n + 1$ より,$\epsilon > 0$

このとき, $B(x;\epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^c$

よって,$(\partial\mathbb{Z})^c \supset \mathbb{Z}^c$

(i),(ii),(iii) から, 主張は示された. $\square$