教科書 問30.2 (X, d) を距離空間とする.

(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を X の有界部分集合とする.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は有界であることを示せ.

各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して, $a_i \in A_i$ を選んでおく.

A は有界なので ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して $A_i \subset B(a_i; \varepsilon_i)$ となる.

ここで $x \in A_i$, $y \in A_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ とすると

$d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y)$ (三角不等式)

$\leq 2 \max\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} + \max\{d(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$

有限である, 有限である. 最大値がとれる.

よって $\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq 2\max\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} + \max\{d(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$

したがって $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は有界

(2) X が全有界ならば X は有界であることを示せ.

X は全有界なので 任意の $\varepsilon > 0$ に対し ある $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が存在し,

$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i; \varepsilon)$ となる。ここで, 各 $B(a_i; \varepsilon)$ は有界である.

各 $B(a_i; \varepsilon)$ がそれぞれ有界であるので (1) より, $\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i; \varepsilon) = X$ は有界