30.3

Aをn次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の有界閉集合とする。

A内の任意の点列$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$をとるとAは有界であり、$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A$であるから$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$は有界点列である。

$\mathbb{R}^n$の任意の有界点列$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$が収束部分列をもつ …(*) を示す。

各mに対してx_mはn次元ベクトルで(y_m, z_m)と表すことにする。

ただし、y_mは第1成分、z_mは第2成分から第n成分まで並べた$n-1$次元ベクトルとする。

$n=1$のとき、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より$\mathbb{R}$上の数列が有界のとき

収束部分列をもつので、命題(*)を満たす。

点列$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$は$\mathbb{R}^n$における有界点列であるから、$x_m = (x_{1m}\ x_{2m}\ \cdots\ x_{nm})$とすると

$\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sqrt{x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + \cdots + x_{nm}^2} \leq M$が成り立つ。

ここで、$y_m = x_{1m}$, $z_m = (x_{2m}\ \cdots\ x_{nm})$で$x_{1m}^2 \geq 0$であるので、

$0 \leq \sqrt{x_{2m}^2 + \cdots + x_{nm}^2} \leq \sqrt{x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + \cdots + x_{nm}^2} \leq M$が成り立つ。

よって、点列$\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$は$\mathbb{R}^{n-1}$における有界点列である。

ここで、命題(*)が$n=t-1$のとき成り立つとすると、点列$\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$は収束部分列をもつ。

これを$\{z_{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$とし、$\lim_{k\to\infty} z_{m(k)} =: b$とする。

この添え字の部分列$\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$に関する$\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$の部分列を$\{y_{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$とする。

ここで、$\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$に関して、$0 \leq |y_m| = |x_{1m}| \leq \sqrt{x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + \cdots + x_{nm}^2} \leq M$なので

$\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$は有界点列である。$0 \leq |y_m| \leq \sqrt{x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + \cdots + x_{nm}^2} \leq M$は任意の$m \in \mathbb{N}$に対して成り立つので、

$\forall k \in \mathbb{N}$に対して$m(k) \in \mathbb{N}$についても同様に成り立つ。

よって、$\{y_{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$は有界点列であり、$n=1$のとき命題(*)が成り立つことから

収束部分列$\{y_{m(k(l))}\}_{l=1}^{\infty}$をもち、$\lim_{l\to\infty} y_{m(k(l))} = a$とする。

$\forall \varepsilon > 0$をとる。$\lim_{k\to\infty} z_{m(k)} = b$より、$\exists K \in \mathbb{N}$ s.t. $k \geq K$, $d(z_{m(k)}, b) < \varepsilon$

ここで、$l \geq K$ $(l \in \mathbb{N})$とすると、$\{z_{m(k(l))}\}_{l=1}^{\infty}$は$\{z_{m(k)}\}$の部分列なので、

$k(l) \geq l \geq K$が成り立ち、$d(z_{m(k(l))}, b) < \varepsilon$が成り立つ。

つまり、$\lim_{l\to\infty} z_{m(k(l))} = b$となり、$\lim_{l\to\infty} x_{m(k(l))} = (a, b)$

従って、$n=t$のときにも命題(*)が成り立つ。数学的帰納法より、$\forall n \in \mathbb{N}$に対し、命題(*)は成り立つ。

また、Aは閉集合であるから、$(a, b) \in A$である。

よって、n次元ユークリッド空間上で、有界閉集合内の任意の点列は収束部分列をもって、

その収束先はその有界閉集合内であるので、点列コンパクトである。

定理30.2より、n次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の有界閉集合はコンパクトである。