問31.2

(X, d)：距離空間、C_X：XのCauchy列全体の集合と表す.
このとき、C_Xの$\sim$による商集合を$\tilde{X}$と表す. また、$\sim$による$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_X$の同値類を$[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$と表し、
実数値関数$\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$を$\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ …①
$([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}] \in \tilde{X})$により定める.
さらに、$x \in X$に対し、Xの点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$を$x_n = x \ (n \in \mathbb{N})$…②により定める
$\iota(x) = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$とおくことにより定めた写像$\iota : X \to \tilde{X}$は等長写像であることを示せ.

∵ $\forall x, x' \in X$をとる.
$d_{\tilde{X}}(\iota(x), \iota(x')) = d_X(x, x')$を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
d_{\tilde{X}}(\iota(x), \iota(x')) &= \tilde{d}(\iota(x), \iota(x')) \\
&= \tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}]) \\
&\overset{①}{=} \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) \\
&\overset{②}{=} \lim_{n\to\infty} d_X(x, x') \\
&= d_X(x, x')
\end{aligned}
$$

すなわち $d_{\tilde{X}}(\iota(x), \iota(x')) = d_X(x, x')$
∴ $\iota : X \to \tilde{X}$は等長写像.