問. 任意の有理数に収束する無理数列が存在することを示せ

解.$\forall$ ε > 0 と $\forall x \in \mathbb{Q}$ をとる。
このとき $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$y_n = \frac{[10^n x]}{10^n} + \frac{\sqrt{2}}{10^{n+1}}$ とおく。
これは小数第 n 位未満の数字の並びを $\sqrt{2}$ の並びに置き換える列である。
故に 任意の自然数 n に対して y_nは無理数の列としてとれる。
また N を $N > \log_{10} \frac{1}{\varepsilon}$を満たす最初の自然数としてとる。
このとき、$n \geq N$ ならば、y_nの取り方と簡単な大小比較から
$|x - y_n| < 10^{-n} \leq 10^{-N} < 10^{-\log_{10} \frac{1}{\varepsilon}} =$ ε となるので
よって ε $- N$ 論法により $\lim_{n \to \infty} y_n = x$ が成立している。
したがって任意の有理数に収束する無理数列が存在する。