AHA2J014 輪垣秀楠

問3.2

任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ について

十進小数展開

$$r = a_N a_{N-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots \quad (1)$$

が存在することを認める.

ただし,

(1) において, $N \in \mathbb{Z}$, $a_N \neq 0$

$a_i \in \{0, \ldots, 9\}$

とする.

r が無理数のときこの表示は一意.

$x_0 = a_N \cdots a_0 \quad \in \mathbb{Q}$

$x_1 = a_N \cdots a_0 . a_{-1} \quad \in \mathbb{Q}$

$x_2 = a_N \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \quad \in \mathbb{Q}$

$\vdots$

$x_k = a_N \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-k} \in \mathbb{Q}$

とすると.

$n > m$ なら.

$$x_n - x_m = 0.0 \cdots 0\, a_{-m-1} \cdots a_{-n}$$

$$\leq 0.0 \cdots 1 = \frac{1}{10^m}$$

よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し.

$-\log_{10} \varepsilon < N$ なる自然数 N をとると.

$N < m < n$ なる任意の n, m に対し.

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^N} < \varepsilon$$

となるので, $\{x_k\}$: コーシー列.

また.

$$0 \leq r - x_k = (a_N \cdots a_0 . a_{-1} \cdots) - x_k$$

$$= 0.00 \cdots 0\, a_{-k-1} a_{-k-2} \cdots$$

$\leq \frac{1}{10^k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$

$\therefore \ x_k \longrightarrow r \quad (k \to \infty)$

別

$\mathbb{R}$を$\mathbb{Q}$の完備化と定義する.

一般のきょり空間(X, d)に対し,

その完備化を$(\tilde{X}, \tilde{d})$とする.

つまり,

$(\tilde{X}, \tilde{d})$: 完備

$\exists \iota : X \longrightarrow \tilde{X}$: 等長埋込み

s.t. $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$

このとき以下を示す.

- 任意の$x \in \tilde{X}$に対し.

X 上の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ が存在して、$\tilde{X}$ 上で、

$$\iota(x_n) \longrightarrow x \quad (n \to \infty)$$

となる

<u>証明</u>

$x \in \tilde{X}$ を任意にとる。

$x \in \overline{\iota(X)}$ より

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、

$$B(x ; \varepsilon) \cap \iota(X) \neq \emptyset$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し、$\varepsilon_n = 1/n$ とする。

$B(x ; \varepsilon_n) \cap \iota(X) \neq \emptyset$ より

$y_n \in B(x ; \varepsilon_n) \cap \iota(X)$ をとれる。

このとき $\tilde{d}(x, y_n) < \varepsilon_n = 1/n$

$y_n \in L(X)$ より、

ある $z \in X$ が存在して

$L(z) = y_n$

となる。

L：等長 つまり L：単射。

よって z は一意に存在するので

この z を x_n とおく。

このとき

$$0 \leq \tilde{d}(x, y_n) < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

よってはさみうちの原理より

$$\tilde{d}(x, y_n) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore \quad y_n \longrightarrow x \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore \quad L(x_n) \longrightarrow x \quad (n \to \infty)$$

$\blacksquare$

Cor. 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し.

r に収束する有理数列 $\{q_n\}_n \subset \mathbb{Q}$

が存在する.

(∵ $(\tilde{X}, \tilde{d}) = (\mathbb{R}, d)$

$(X, d) = (\mathbb{Q}, d)$

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ q & \longmapsto & q \end{array} \quad : \text{包含写像}$$

として上の定理を適用すればよい.