問3.3
「任意の収束するXの点列$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$に対し、その極限$a\in X$に含まれる」
という条件を用いて得られる、$\mathbb{R}^n \supset Y$が開集合であるための必要十分条件
解)
「任意の$a\in Y$に対して、$^\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(a;\varepsilon)\subset Y$」…開集合の定義
$\iff$ 「任意の収束するY^cの点列$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$に対し、$\lim_{k\to\infty}a_k\in Y^c$」
(i) $Y=\phi$のとき Yは開集合
(ii) $Y\neq\phi$のとき
($\Rightarrow$)
$^\forall a\in Y$をとる
$^\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(a;\varepsilon)\subset Y$.
$\lim_{k\to\infty}a_k\in Y$となるaに収束する$Y^c$の点列$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$が存在すると仮定する.
$\lim_{k\to\infty}a_k=a$. よって、$^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $k>N\Rightarrow a_k\in B(a;\varepsilon)\subset Y$
しかし、a_kがY^cの点列であるということに矛盾.
$\therefore \lim_{k\to\infty}a_k\in Y^c$ //
($\Leftarrow$)(対偶を示す)
$^\exists a\in Y$ s.t. 任意の$\varepsilon>0$に対して、$B(a;\varepsilon)\cap Y^c\neq\phi$ と仮定する.
「$^\exists\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset Y^c$ s.t. $\lim_{k\to\infty}a_k\in Y$」を示す.
任意の$k\in\mathbb{N}$に対して、$\varepsilon=\frac{1}{k}$とすると、$B(a;\frac{1}{k})\cap Y^c\neq\phi$. ← 選択公理
よって、各kに対して、$a_k\in B(a;\frac{1}{k})\cap Y^c$となる点$a_k$を選ぶことができる.
このとき、$^\forall\varepsilon>0$、$^\exists K\in\mathbb{N}$ s.t. $k\geq K\Rightarrow\|a_k-a\|<\varepsilon$ を示す
仮定の$^\forall\varepsilon>0$に対して $K=[\frac{1}{\varepsilon}]+1\in\mathbb{N}$とすると
$k\geq K$で $a_k\in B(a;\varepsilon)\cap Y^c$より $\|a_k-a\|<\varepsilon$
よって $a_k\to a$ で $\lim_{k\to\infty}a_k\in Y$ //