位相演習

No.
Date . .

4.1 $\mathcal{O}_X = \{O \cap X \mid O \in \mathcal{O}\}$

(O1) $\phi, X \in \mathcal{O}_X$ を示す

$\mathcal{O}$の定義より $\phi \in \mathcal{O}$ なので $\phi = \phi \cap X$ より $\phi \in \mathcal{O}_X$

また $X \subset \mathbb{R}^n$ と $\mathcal{O}$の定義より $\mathbb{R}^n \in \mathcal{O}$ なので $X = \mathbb{R}^n \cap X$ より $X \in \mathcal{O}_X$

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_X$ を示す

$\mathcal{O}_X$の条件よりある $O_1', O_2' \in \mathcal{O}$ が存在して

$O_1 = O_1' \cap X$, $O_2 = O_2' \cap X$ なので

$O_1 \cap O_2 = (O_1' \cap X) \cap (O_2' \cap X) = (O_1' \cap O_2') \cap X$

ここで $\mathcal{O}$の定義より $O_1' \cap O_2' \in \mathcal{O}$

これと$\mathcal{O}_X$の条件より $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_X$

(O3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{O}_X$の元からなる集合族とすると

このとき ある $O_\lambda' \in \mathcal{O}$ が存在し $O_\lambda = O_\lambda' \cap X$。

よって $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_\lambda' \cap X) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda') \cap X$

$\mathcal{O}$の定義と $O_\lambda' \in \mathcal{O}$ より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda' \in \mathcal{O}$。

したがって $\mathcal{O}_X$の条件より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_X$ となる。