

位相数学1 演習

AHA23045

千葉 虎左

問 4.3

○ $X = [a, b)$ ($a < b$) の開集合 U は、

\mathbb{R} の開集合 O が存在して、 $U = [a, b) \cap O$ と表せる

このとき、 a は境界点であるので U に a が入っているときと入っていないときで場合分けする必要がある

(i) U に a が入っていないとき

このとき、 O に a が入っていないので、 $U = (a, b) \cap O$ となる

よって、 U は (a, b) に含まれる \mathbb{R} の開集合 O'

(ii) U に a が入っているとき

このとき、 O にも a が入っている a で、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、

a の近傍、 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ が O に含まれる ($\varepsilon \in (0, b - a]$)

よって、 U には $[a, a + \varepsilon)$ が含まれる

$U = [a, a + \varepsilon) \cup ((a, b) \cap O)$ となる

よって、 U は、 $[a, a + \varepsilon) \cup O'$

または、単に $[a, a + \varepsilon)$ ($[a, a + \varepsilon) \cup \emptyset$) である

$$U = \begin{cases} (a, b) \text{ に含まれる } \mathbb{R} \text{ の開集合 } O' & (U \text{ に } a \text{ が入っていないとき}) \\ [a, a + \varepsilon) \quad (\varepsilon \in (0, b - a]) & (U \text{ に } a \text{ が入っているとき}) \\ [a, a + \varepsilon) \cup O' & \end{cases}$$

○ $X = (a, b]$ ($a < b$) の開集合 U' は、

$$U' = \begin{cases} (a, b) \text{ に含まれる } \mathbb{R} \text{ の開集合 } O' & (U' \text{ に } b \text{ が入っていないとき}) \\ (b - \varepsilon, b] \quad (\varepsilon \in (0, b - a]) & (U' \text{ に } b \text{ が入っているとき}) \\ (b - \varepsilon, b] \cup O' & \end{cases}$$