相対位相
$\mathfrak{O}_X := \{O \cap X \mid O \in \mathfrak{O}\}$

問4.4

$O_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$ が成り立つことを示す.

(ただし. $l_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, $\mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})} = \{O_{\mathbb{R}^2} \cap l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid O_{\mathbb{R}^2} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}\}$)

(⇒) $\forall O_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$ をとる.

(i) $O_{\mathbb{R}} = (a, b)$ $(a<b)$ のとき.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = \{(x, 0) \mid a < x < b\}$ となる.

$O_{\mathbb{R}^2} := \left\{(x, y) \mid \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}$

とおくと. $O_{\mathbb{R}^2} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}$ であり.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2}$ となるので.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$

(ii) $O_{\mathbb{R}} = (a, +\infty)$ のとき.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = \{(x, 0) \mid x > a\}$ となる

$O_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) \mid x > a, y \in \mathbb{R}\}$ とおくと.

任意に 点 $(p, q) \in O_{\mathbb{R}^2}$ をとると. $\varepsilon := \frac{a-p}{2}$ とすると $B_{((p,q);\varepsilon)} \subset O_{\mathbb{R}^2}$ より.

$O_{\mathbb{R}^2} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}$ である.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2}$ となるので.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$

(iii) $O_{\mathbb{R}} = (-\infty, b)$ のとき.

(ii)と同様.

(iv) $O_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ のとき.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ となる.

$O_{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ とすると. $O_{\mathbb{R}^2} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}$ である.

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2}$ となるので

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}})}$

問題文

$\mathbb{R} \supset O$ が $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して.
開集合であることと.
写像 $l_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$
により. $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と見なして定めた相対位相に関して開集合であることは同値であることを示せ.

(i)〜(iv) は $\mathbb{R}$ 上の開基であるため，$\mathbb{R}$ 上の任意の開集合は (i)〜(iv) の和集合によって

表せるので $l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ 上の有限個及び無限個の開集合の和集合が開集合であることから，

$\mathbb{R}$ における全ての開集合 $O_{\mathbb{R}}$ について，$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$ が成り立つことが示せた □

(⇐) $^\forall l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$ をとる.

$^\exists O_{\mathbb{R}^2} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}$ s.t. $l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2}$

$l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) = l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2}$ において，

$l_{\mathbb{R}}$ に関して逆像をとると $l_{\mathbb{R}}^{-1}(l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}})) = l_{\mathbb{R}}^{-1}(l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cap O_{\mathbb{R}^2})$

$$O_{\mathbb{R}} = l_{\mathbb{R}}^{-1}(l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})) \cap l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$$

$$O_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$$

ここで，$l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2}) \subset \mathbb{R}$ より，

$$O_{\mathbb{R}} = l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2}) \cdots ①$$

$^\forall a \in l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$ をとる

$a \in l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$ より，$l_{\mathbb{R}}(a) \in O_{\mathbb{R}^2}$.

従って，$^\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(l_{\mathbb{R}}(a);\varepsilon) \subset O_{\mathbb{R}^2}$ (開集合及び内点の定義)

逆像をとると，

$l_{\mathbb{R}}^{-1}(B(l_{\mathbb{R}}(a);\varepsilon)) \subset l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$

$l_{\mathbb{R}}^{-1}(B(l_{\mathbb{R}}(a);\varepsilon)) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$

$B(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2})$

よって，$l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2}) \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$

したがって，①より，$O_{\mathbb{R}} = l_{\mathbb{R}}^{-1}(O_{\mathbb{R}^2}) \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$

つまり，$O_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$ が成り立つことが示せた.

以上より，$O_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow l_{\mathbb{R}}(O_{\mathbb{R}}) \in \mathfrak{O}_{l_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$ が成り立つこと

つまり，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と見なして定めた相対位相に

関して開集合であることは，同値であると示せた □