問 5.1　同相は同値関係であることを示せ。

∵)(i)(反射律):

$(X, \mathfrak{O}_X)$ からそれ自身への恒等写像を id とする。

id は,恒等写像の定義より、全単射である。

また、$^{\forall}O \in \mathfrak{O}_X$ とおくと、

$$id^{-1}(O) = O \in \mathfrak{O}_X$$

ゆえに、id は連続である。

さらに、$^{\forall}O' \in \mathfrak{O}_X$ とおくと、

$$id(O') = O' \in \mathfrak{O}_X$$

ゆえに、id は開写像である。

よって、id は $(X, \mathfrak{O}_X)$ からそれ自身への同相写像である。

したがって、

$$(X, \mathfrak{O}_X) \approx (X, \mathfrak{O}_X)$$

(ii)(対称律):

$(X, \mathfrak{O}_X)$ から $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ への同相写像を f とする。

このとき、逆写像

$$f^{-1} : Y \to X$$

は f が全単射であることから、f^{-1} も全単射といえる。

また、f が開写像であるので、開写像の定義より、f^{-1} は連続である。

逆に、f が連続であるので、連続の定義より、f^{-1} は開写像である。

よって、f^{-1} は $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ から $(X, \mathfrak{O}_X)$ への同相写像である。

したがって、

$$(Y, \mathfrak{O}_Y) \approx (X, \mathfrak{O}_X)$$

(ⅲ)(推移律):

$(X, \mathfrak{O}_X)$ から $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ への同相写像を f 、$(Y, \mathfrak{O}_Y)$ から $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ への同相写像を f' とする。

このとき、 f, f' は全単射であるので、 $f' \circ f$ も全単射である。

また、 f, f' は連続であるので、

$$O_Y \in \mathfrak{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(O_Y) \in \mathfrak{O}_X$$
$$O_Z \in \mathfrak{O}_Z \Rightarrow f'^{-1}(O_Z) \in \mathfrak{O}_Y$$

$O_Z \in \mathfrak{O}_Z$ に対し、

$$(f' \circ f)^{-1}(O_Z) = f^{-1}(f'^{-1}(O_Z))$$

$f'^{-1}(O_Z) \in \mathfrak{O}_Y$ より、

$$(f' \circ f)^{-1}(O_Z) \in \mathfrak{O}_X$$

よって、

$$O_Z \in \mathfrak{O}_Z \Rightarrow (f' \circ f)^{-1}(O_Z) \in \mathfrak{O}_X$$

すなわち、 $f' \circ f$ は連続である。

さらに、 f, f' は開写像であるので、

$$O_X \in \mathfrak{O}_X \Rightarrow f(O_X) \in \mathfrak{O}_Y$$
$$O_Y \in \mathfrak{O}_Y \Rightarrow f'(O_Y) \in \mathfrak{O}_Z$$

$O_X \in \mathfrak{O}_X$ に対し、

$$(f' \circ f)(O_X) = f'\big(f(O_X)\big)$$

$f(O_X) \in \mathfrak{O}_Y$ より、

$$(f' \circ f)(O_X) \in \mathfrak{O}_Z$$

よって、

$$O_X \in \mathfrak{O}_X \Rightarrow (f' \circ f)(O_X) \in \mathfrak{O}_Z$$

すなわち、 $f' \circ f$ は開写像である。
よって、 $f' \circ f$ は $(X, \mathfrak{O}_X)$ から $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ への同相写像である。
したがって、

$$(X, \mathfrak{O}_X) \approx (Z, \mathfrak{O}_Z)$$

以上より、同相は同値関係である。

■