位相数学 1 演習問題 5-2

山口創大

2024 年 7 月 8 日

$(0,1),(0,1],[0,1]$はそれぞれ互いに同相でないことを示せ

$(0,1),(0,1]$が同相でないことを示す.

$(0,1),(0,1]$が同相であると仮定すると

$\exists f:(0,1)\to(0,1] s.t. f$は全単射かつ連続かつ開写像　が成り立つ.

fは連続でかつ単射($\because f$: 全単射)なので狭義単調である.

ここで, fが狭義単調増加だとすると

fの全射性より$f(a)=1$となる$a\in(0,1)$が存在する.

実数の稠密性より

$a<a'<1$となるa'が存在して, fの単調増加性より, $f(a')>1$となるが, これは$f(x)\leq 1(\forall x\in(0,1))$に矛盾.

一方, fが狭義単調減少だとしても, 同様の議論により, $f(b)=1$となるbよりも小さいb'で

$(0,1)$に属するものが存在するので矛盾.

以上より, $(0,1),(0,1]$は同相でない.

$(0,1]$と$[0,1]$が同相でないことを示す. $(0,1]$と$[0,1]$が同相であると仮定すると

$\exists f:(0,1]\to[0,1] s.t. f$は全単射かつ連続かつ開写像　が成り立つ.

fは連続かつ単射なので狭義単調である.

ここで, fが狭義単調増加だとすると,

fの全射性より$f(a)=0$となるaに対して, 実数の稠密性より, $0<a'<a$となるa'が存在して,

単調増加性から$f(a')<0$が成り立つ.

しかし, これは$f((0,1])=[0,1](\because f$は全単射)に矛盾している.

一方で, fが狭義単調減少だとしても,

同様の議論により, $f(b)=1$となるbよりも小さいb'で$(0,1]$に属するものが存在するので矛盾.

以上より, $(0,1]$と$[0,1]$は同相でない.

$(0,1)$と$[0,1]$について

$(0,1)$と$[0,1]$が同相であると仮定すると, (1)と全く同様の議論により矛盾が生じる.

よって, $(0,1)$と$[0,1]$は同相でない.

以上より, この問題の主張は示された.