位相数学1演習　AHA23045　傑虎佐

問 5.4　$(\mathbb{R}^2 \supset) B(0;1)$ と $\mathbb{R}^2$ は同相であることを示せ。

標座標で考えると $\mathbb{R}^2$ は半径が ∞ の開円板とみることができる
よって、半径 $0 \le r < 1$ と半径 $0 \le r < +\infty$ との間で同相写像を与えればよい

$f(r) := \frac{r}{1-r}$ $(0 \le r < 1)$ とすると、$f(r)$ は連続関数で、
$f'(r) = \frac{1}{(r-1)^2} > 0$ より、狭義単調増加である
さらに、$\lim_{r \to 1} f(r) = +\infty$、中間値の定理より、
f は $[0,1)$ から $[0,+\infty)$ への全単射である
また、$f^{-1}(r)$ も連続関数であり、$f^{-1}(r) = \frac{r}{r+1}$ $(0 \le r < +\infty)$
$(f'(r))' = \frac{1}{(r+1)^2} > 0$ より、狭義単調増加である
さらに、$\lim_{r \to \infty} f^{-1}(r) = 1$
ゆえに、f^{-1} は $[0,+\infty)$ から $[0,1)$ への全単射である
ここで、$F : B(0;1) (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ を $F(x,y) := \left(\frac{1}{1-r}x, \frac{1}{1-r}y\right)$ とする
(ただし、$(x,y) \in B(0,1)$、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とすると、$0 \le r < 1$ となる)
すると、$F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to B(0,1) (\subset \mathbb{R}^2)$ は $F^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{1+r}x, \frac{1}{1+r}y\right)$ で、
$(0 \le r < +\infty)$
よって、F は連続写像であること、
F は $B(0,1) (\subset \mathbb{R}^2)$ から $\mathbb{R}^2$ への全単射であること
F^{-1} が連続写像であることがいえた
したがって、F が $B(0,1) (\subset \mathbb{R}^2)$ から $\mathbb{R}^2$ への同相写像であることが示された
ゆえに、$B(0,1) (\subset \mathbb{R}^2)$ と $\mathbb{R}^2$ は同相である//