問 5.5

〈問題〉
$(-1,1)\times(-1,1)$と$(R^2\supset)B(0;1)$は同相であることを示せ。

〈解答〉
$f:(-1,1)\times(-1,1)\to B(0;1):(x,y)\mapsto\left(x,\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{2}y\right)$とする。
このとき、$(-1,1)\times(-1,1)$と$B(0;1)$が同相であることを示すためには、fが同相写像、すなわち次の①、②、③を示せばよい。
① $f:bij\ i.e. f:surj$ かつ $f:inj$
② f:連続
③ f^{-1}:連続

① $(f:surj)$
$\forall(u,v)\in B(0,1)$をとる。
このとき、$(x,y)=\left(u,\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)$とすると、$(u,v)\in B(0;1)$より、
$-1<u<1,-1<v<1,u^2+v^2<1$
よって、$|v|<\sqrt{1-u^2}$より、$v\neq0$のとき、$\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}<\frac{v}{|v|}$、ゆえに$-1<v<1$において
$-1<\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}<1$より、$-1<\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}<1$であるから、$(x,y)\in(-1,1)\times(-1,1)$
したがって、
$f(x,y)=f\left(u,\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)=\left(u,\sqrt{1-u^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right)=(u,v)$より、
$f:surj$
$(f:inj)$
$\forall(x,y),(x',y')\in(-1,1)\times(-1,1)[f(x,y)=f(x',y')]$をとる。
このとき、$f(x,y)=f(x',y')$より、$x=x',\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{2}y=\sqrt{1-x'^2}\sin\frac{\pi}{2}y'$であるから、$\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{2}y=\sqrt{1-x'^2}\sin\frac{\pi}{2}y'\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2}y=\sin\frac{\pi}{2}y'[x=x']$
よって、$t\in(-1,1)$において、$g(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$とすると、この関数は単調増加であるから、
$g:inj$、ゆえに$y,y'\in(-1,1)$より、$g(y)=g(y')\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2}y=\sin\frac{\pi}{2}y'\Rightarrow y=y'$
したがって、$(x,y)=(x',y')$より、$f:inj$
以上より、$f:bij$

② $\sqrt{1-x^2}$について、x^2は$x\in(-1,1)$において明らかに連続であるから、$1-x^2$も連続である。
また、$\sqrt{x}$は$x\geq0$において連続である。

よって、$x\in(-1,1)$のとき、$0<1-x^2\leq 1$であるから、$\sqrt{1-x^2}$は連続である。

したがって、$x,\sin\frac{\pi}{2}y$は$(x,y)\in(-1,1)\times(-1,1)$において明らかに連続であるから、

$\left(x,\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{2}y\right)$も連続、ゆえに$f$:連続

③　①より、fに対してf^{-1}が存在し、

$f^{-1}:B(0;1)\to(-1,1)\times(-1,1):(x,y)\to(x,\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}})$となる。

このとき、$\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$について、$(x,y)\in B(0;1)$において、$-1<x<1,-1<y<1$となる

ことから、②より、$y,\sqrt{1-x^2}$は連続、かつ$0<\sqrt{1-x^2}\leq 1$であるから、$\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$も連続

である。

また、$\sin^{-1}x$は$x\in(-1,1)$において明らかに連続である。

よって、$(x,y)\in B(0;1)$において、$x,\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$は連続であるから、

$\left(x,\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)$も連続、ゆえに$f^{-1}$:連続

以上より、f:同相写像であるから、$(-1,1)\times(-1,1)$と$B(0;1)$は同相である。