Date

AHA23016 奥田 心美

問5.6 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ と $\mathbb{R}^2$ の開円環領域（半径の異なる二つの同心円に挟まれた開集合）$B(0;2)\setminus\overline{B(0;1)}$ は同相であることを示せ.

☺ [示すこと: ${}^{\exists}f: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \longrightarrow B(0;2)\setminus\overline{B(0;1)}$: 同相写像]

$$f: \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \longrightarrow B(0;2)\setminus\overline{B(0;1)}$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\left(2-\frac{1}{2^{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \left(2-\frac{1}{2^{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
とおく.

[示すこと: f: 同相写像
i.e. f: 全単射, f, f^{-1}: 連続]

$$g: B(0;2)\setminus\overline{B(0;1)} \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\left(\log_2\frac{1}{2-\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \left(\log_2\frac{1}{2-\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
とおくと

$$(f\circ g)(x,y) = (x,y)$$
$$(g\circ f)(x,y) = (x,y)$$

よって $g = f^{-1}$ となり f: 全単射

また f, f^{-1} は始集合, 終集合共に $\mathbb{R}^2$ の開集合で、各成分連続なので

f, f^{-1}: 連続

$\therefore f$: 同相写像

$\therefore \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ と $B(0;2)\setminus\overline{B(0;1)}$ は同相 ∎