問5.7

$S^1 = \{(x_1, y_1) \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}$

$A = \left\{(x_1, y_1) \mid \frac{(x_1 - c_1)^2}{a_1^2} + \frac{(y_1 - c_2)^2}{a_2^2} = 1\right\}$

$f : S^1 \ni (x, y) \longmapsto (a_1 x + c_1,\ a_2 y + c_2) \in A$

とおいて，fが全単射で f, f^{-1} が連続なことを示す.

$g : A \ni (x, y) \longmapsto \left(\frac{x - c_1}{a_1}, \frac{y - c_2}{a_2}\right) \in S^1$　とおくと

$(f \circ g)(x, y) = (x, y)$

$(g \circ f)(x, y) = (x, y)$

よって $g = f^{-1}$ となり f は全単射

$F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto (a_1 x + c_1,\ a_2 y + c_2) \in \mathbb{R}^2$　とおくと Fは各成分連続なので連続

$\iota : S^1 \ni (x, y) \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$　とおくと ι は連続

よって $F \circ \iota$ は連続

任意のAの開集合は$\mathbb{R}^2$の開集合 O を用いて $O \cap A$ と表せる.

$f^{-1}(O \cap A) = (F \circ \iota)^{-1}(O \cap A)$

$\quad = (F \circ \iota)^{-1}(O) \cap (F \circ \iota)^{-1}(A)$

$\quad = (F \circ \iota)^{-1}(O)$　　($\because (F \circ \iota)(S^1) = A$ より $(F \circ \iota)^{-1}(O) \subset (F \circ \iota)^{-1}(A)$)

$F \circ \iota$ の連続性から $(F \circ \iota)^{-1}(O) = f^{-1}(O)$ は開集合

$\therefore f$ は連続

f^{-1}も同様にすると連続と分かり,

f は同相写像となり

S^1とA は同相 ∎