$\forall O \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$をとり O の連結成分全体の集合を $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$で表すとする
$\forall x_\lambda \in O_\lambda$を一つとると O が開集合であることから $\exists \varepsilon_\lambda > 0 \ s.t. \ B(x_\lambda;\varepsilon_\lambda) \subset O$
$B(x_\lambda;\varepsilon_\lambda)$ は連結な O の部分集合であって O_λとの共通部分が空でないので $B(x_\lambda;\varepsilon_\lambda) \subset O_\lambda$となる
有理数の稠密性より $\exists q_\lambda \in \mathbb{Q} \ s.t. \ q_\lambda \in B(x_\lambda;\varepsilon_\lambda)$
$f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q} \ ; \lambda \longmapsto q_\lambda$ として f を定めると
$\forall \lambda \ , \lambda' \in \Lambda$に対し $q_\lambda = q_{\lambda'}$のとき $O_\lambda \cap O_{\lambda'} \neq \varnothing$より $O_\lambda \cup O_{\lambda'}$は連結な O の部分集合で $O_\lambda \subset O_\lambda \cup O_{\lambda'}$である. また O_λは自身と共通部分をもつ連結な O の部分集合のなかで包含関係において最大となるため $O_\lambda \cup O_{\lambda'} \subset O_\lambda$となる. 故に $O_\lambda \cup O_{\lambda'} = O_\lambda$ 同様に $O_\lambda \cup O_{\lambda'} = O_{\lambda'}$であるから $O_\lambda = O_{\lambda'}$であり$\lambda = \lambda'$よって $f : inj$
$f : inj$ より$\#\Lambda \leq \#\mathbb{Q} = \aleph_0$となるから $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$は高々可算.