問 6.4

後呂 悠惟 (AHA23051)

2024 年 7 月 22 日

1 問題内容

写像 $f : X \longrightarrow Y$ について, 次の問に答えよ.

(1) X が離散位相空間のとき,f は連続であることを示せ.
(2) Y が離散位相空間のとき, 写像 f が連続であるための条件を求めよ.

2 回答

2.1 (1) の回答

任意の Y の開集合の逆像が X の開集合であることを示せばよい.

任意の $O_Y \in \mathscr{O}_Y$ をとる. このとき, 逆像の定義より $f^{-1}(O_Y) \subset X$.
X は離散位相空間より,$\mathscr{O}_X = \mathfrak{P}(X)$. したがって $f^{-1}(O_Y) \in \mathscr{O}_X$.
よって f は連続.

2.2 (2) の回答

写像 f が連続であるための必要十分条件として以下を考える.

X の連結成分の族を $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ としたとき,

$$f : \text{連続} \Leftrightarrow \forall \lambda_0 \in \Lambda, \exists \Lambda'(\lambda_0 \in \Lambda' \subset \Lambda) s.t. Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda : \text{開集合} \wedge f|_Z : \text{定値写像}$$

これを示す.

2.2.1 ($\Rightarrow$) の証明

補題として以下を示す:

$$\text{任意の } y \in f(X) \text{ に対し } f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \text{ なる } \Lambda'(\subset \Lambda) \text{ が存在する.}$$

任意の $y \in f(X)$ をとる.
y のとり方より $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$ で, 一点集合は必ず連結であるため, ある空でない X の連結集合の族 $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ が存在して,

$$f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \cdots ①$$

このとき各 $\mu \in M$ に対し,B_μ が含まれるような $A_{\lambda_\mu}(\lambda_\mu \in \Lambda)$ が存在する (B_μ を含む X の連結成分を考えればよい).
各 $\mu \in M$ に対する λ_μ 全体を Λ' とおくと,$\Lambda' \subset \Lambda$. この Λ' が補題を満たすことを示す.
Λ' のとり方より,

$$\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \cdots ②$$

任意の $\mu \in M$ に対し $f(B_\mu) = \{y\}$ で,$B_\mu \subset A_{\lambda_\mu}$ より $\{y\} \subset f(A_{\lambda_\mu})$.
ここで,A_{λ_μ} が連結で f が連続より,$f(A_{\lambda_\mu}) \subset Y$ は連結.
Y は離散位相空間で任意の一点集合が開集合であるから, 要素が 2 つ以上あるような Y の部分集合は連結でない. また, 任意の一点集合と空集合は連結である.
つまり,$f(A_{\lambda_\mu})$ は空でないため一点集合である. よって,$f(A_{\lambda_\mu}) = \{y\}$. すなわち $A_{\lambda_\mu} \subset f^{-1}(\{y\})$.
$\mu \in M$ は任意だから,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \subset f^{-1}(\{y\}) \cdots ③$$

①,②,③ より,

$$\bigcup_{\mu \in M} B_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \subset f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$$

つまり,

$$f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$$

よって補題が示せた.

さて, 補題を用いて当初の命題を示す.

任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ をとる.A_{λ_0} は連結で f は連続だから $f(A_{\lambda_0}) \subset Y$ は連結.
Y は離散位相空間であるため $f(A_{\lambda_0})$ は一点集合. つまり, ある $y \in Y$ が存在して $f(A_{\lambda_0}) = \{y\}$.
$y \in f(A_{\lambda_0}) \subset f(X)$ で, 補題より $f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ なる $\Lambda'(\subset \Lambda)$ が存在する.
このとき,$A_{\lambda_0} \subset f^{-1}(\{y\})$ で各 A_λ は互いに共通部分を持たないから,$\lambda_0 \in \Lambda'$.
$Z = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$ とおく. $f^{-1}(\{y\}) = Z$ で $y \in f(X)$ より $f(Z) = \{y\}$.
よって $f|_Z$ は常に y を返す定値写像.
Y は離散位相空間より $\{y\}$ は開集合.f は連続なのでこの逆像は開集合.
$f^{-1}(\{y\}) = Z$ より Z は開集合.

2.2.2 (⇐) の証明

Y が離散位相空間であることから次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
f: \text{連続} &\Leftrightarrow \text{任意の } Y \text{ の開集合の } f \text{ による逆像が } X \text{ の開集合} \\
&\Leftrightarrow \text{任意の } Y \text{ の部分集合の } f \text{ による逆像が } X \text{ の開集合} \\
&\Leftrightarrow \text{任意の } Y \text{ の部分一点集合の } f \text{ による逆像が } X \text{ の開集合}
\end{aligned}
$$

よって, 任意の Y の部分一点集合の f による逆像が X の開集合であることを示せばよい.

任意の $\{y\} \subset Y$ をとる. さらに, 任意の $x \in f^{-1}(\{y\})$ をとる.
x が属する連結成分を $A_{\lambda_x}(\lambda_x \in \Lambda)$ とおく.
仮定より,$\lambda_x \in \Lambda'_x \subset \Lambda$ を満たす Λ'_x で,$Z_x = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'_x} A_\lambda$: 開集合 $\wedge f|_{Z_x}$: 定値写像となるものが存在する.
$x \in A_{\lambda_x} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'_x} A_\lambda = Z_x$ より $x \in Z_x$. よって,

$$f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} Z_x \cdots ①$$

また,$x \in f^{-1}(\{y\})$ より $f(x) = y$ だから $f|_{Z_x}(x) = y$ で,$f|_{Z_x}$: 定値写像より $f(Z_x) = \{y\}$.
よって $Z_x \subset f^{-1}(\{y\})$. $x \in f^{-1}(\{y\})$ は任意だから,

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} Z_x \subset f^{-1}(\{y\}) \cdots ②$$

①, ② より,

$$f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} Z_x$$

各 Z_x は開集合であるから $\bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} Z_x$ も開集合. よって $f^{-1}(\{y\})$ も開集合.
したがって, 任意の Y の部分一点集合の f による逆像が X の開集合であるから,f は連続.