$f: X \to Y$ 連続　連結な $X' \subset X$ に対し、$f(X')$ も連結を示す。

$f(X')$ が連結でないと仮定する。

つまり　$f(X') \subset O_1 \cup O_2$,　$(f(X') \cap O_1) \cap (f(X') \cap O_2) = \emptyset$

であり　$f(X') \cap O_1 \neq \emptyset$　$f(X') \cap O_2 \neq \emptyset$

となる　Y の開集合 O_1, O_2 が存在したとする。

f は連続なので　$f^{-1}(O_1)$, $f^{-1}(O_2)$ は X の開集合

$f(X') \subset O_1 \cup O_2$ なので、

$$f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \cup O_2) \supset f^{-1}(f(X')) \supset X'$$

$$\therefore\ f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \supset X' \quad \cdots ①$$

次に、

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((f(X') \cap O_1) \cap (f(X') \cap O_2)\big) &= f^{-1}(f(X') \cap O_1) \cap f^{-1}(f(X') \cap O_2) \\ &= \big(f^{-1}(f(X')) \cap f^{-1}(O_1)\big) \cap \big(f^{-1}(f(X')) \cap f^{-1}(O_2)\big) \\ &\supset \big(X' \cap f^{-1}(O_1)\big) \cap \big(X' \cap f^{-1}(O_2)\big) \end{aligned}$$

仮定より、$(f(X') \cap O_1) \cap (f(X') \cap O_2) = \emptyset$ なので、

$$f^{-1}\big((f(X') \cap O_1) \cap (f(X') \cap O_2)\big) = \emptyset$$

よって　$(X' \cap f^{-1}(O_1)) \cap (X' \cap f^{-1}(O_2)) = \emptyset \quad \cdots ②$

さらに、　$f(X') \cap O_1 \neq \emptyset$　なので　$\exists y \in Y$ s.t. $f(X') \cap O_1 \ni y$

$f(X') \ni y$ より　$\exists x \in X'$ s.t. $f(x) = y$

$y = f(x) \in O_1$　なので　$x \in f^{-1}(O_1)$

よって　$X' \cap f^{-1}(O_1) \ni x$

$\therefore\ X' \cap f^{-1}(O_1) \neq \emptyset \quad \cdots ③$

同様に $\therefore\ X' \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset \quad \cdots ④$

①, ② と X' が連結であることより

$X' \cap f^{-1}(O_1) = \emptyset$ または $X' \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$

これは③, ④に矛盾

従って　$f(X')$ は連結