問6.6. $\{\overset{X}{\overset{\shortparallel}{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}}}\} \cup \overset{Y}{\overset{\shortparallel}{\{\{0\}\times[-1,1]\}}}$ は connected だが path-connected でないことを示す.

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$

とすると f は連続

$X=f((0,\infty))$ は connected である $(0,\infty)$ の連続写像による像なので

X は connected

次に $X\cup Y\subset\overline{X}$ を示す

Y の任意の点が X の触点であることを言えばよい

$^\forall y\in[-1,1]$ をとる

$^\exists\theta\in[0,2\pi)$: $y=\sin\theta$ ($\sin$ の全射性)

$x_n := \frac{1}{\theta+2n\pi}$

$y_n := y$ とすれば $y_n=\sin\frac{1}{x_n}$

$\therefore \{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$

$(x_n,y_n)\to(0,y)$ (as $n\to\infty$)

$\therefore$ $(0,y)$ に収束する X 内の点列が存在するので

$(0,y)$ は X の触点

$\therefore X\cup Y\subset\overline{X}$

X は connected であるから

$X\subset X\cup Y\subset\overline{X}$ より

$X\cup Y$ も connected

$X\cup Y$: Path-connected とする

$^\exists f:[0,1]\to X\cup Y$: 連続 ($f(0)=(0,0)$, $f(1)=(1,\sin 1)$)

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x$ とすると g: 連続

$\iota: X\cup Y\to\mathbb{R}^2$: 包含写像 は連続

よって $g\circ\iota$ は連続

よって $(g\circ\iota)\circ f$ も連続

$p_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $q_n := \frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2n\pi}$ とおくと

$(g\circ\iota\circ f)(0)=0<\cdots<p_{n+1}<q_n<p_n<\cdots<q_2<p_2<q_1<p_1<1=(g\circ\iota\circ f)(1)$

$g\circ\iota\circ f$: 連続なので中間値の定理より

$^\exists a_1\in(0,1)$: $(g\circ\iota\circ f)(a_1)=p_1$

$g\circ\iota\circ f|_{[0,a_1]}$ は連続であるから中間値の定理を用いると

$^\exists b_1\in(0,1)$: $(g\circ\iota\circ f|_{[0,a_1]})(b_1)=(g\circ\iota\circ f)(b_1)=q_1$

$g\circ\iota\circ f|_{[0,b_1]}$ は連続なので中間値の定理より

$^\exists a_2\in(0,1)$: $(g\circ\iota\circ f|_{[0,b_1]})(a_2)=(g\circ\iota\circ f)(a_2)=p_2$

これを繰り返すと

$0<\cdots<a_{n+1}<b_n<a_n<\cdots<b_2<a_2<b_1<a_1<1$

$(g\circ\iota\circ f)(a_n)=p_n$, $(g\circ\iota\circ f)(b_n)=q_n$

となる $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,1)$ がとれる

$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界であるから

$c := \inf(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ とすると

$c_n\to c$ (as $n\to\infty$)

$^\forall\varepsilon>0$ をとる

f の連続性から

$^\exists\delta>0 : |a_n-c|<\delta \Rightarrow |f(a_n)-f(c)|<\varepsilon$

$a_n\to c$ (as $n\to\infty$) より

$^\exists N'\in\mathbb{N} : n\geq N' \Rightarrow |a_n-c|<\delta$

$N:=N'$ とおくと

$n\geq N$ のとき

$|a_n-c|<\delta \Rightarrow |f(a_n)-f(c)|<\varepsilon$

b_n の方も同様にすると

$\{f(a_n)\}$, $\{f(b_n)\}$ は同じ値に収束する

しかし

$(g\circ\iota\circ f)(a_n)=p_n$, $(g\circ\iota\circ f)(b_n)=q_n$ より

$f(a_n)=(p_n,\sin\frac{1}{p_n})=(p_n,1)\to(0,1)$

$f(b_n)=(q_n,\sin\frac{1}{q_n})=(q_n,-1)\to(0,-1)$

これは矛盾

よって $X\cup Y$ は path-connected でない ■