$\forall X \subset \mathbb{R}$ をとり, 任意に開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる.
$\forall x \in X$ に対し,$\exists \lambda_x \in \Lambda\ s.t.\ x \in U_{\lambda_x}$ この U_{λ_x} は開なので $\exists \varepsilon_x > 0\ s.t.\ B(x;\varepsilon_x) \in U_{\lambda_x}$
有理数の稠密性より $\exists \varepsilon'_x \in \mathbb{Q}\ s.t.\ 0 < \varepsilon'_x < \varepsilon_x$ であり, このとき $B(x;\varepsilon'_x) \subset B(x;\varepsilon_x) \subset U_{\lambda_x}$
また, さらに有理数の稠密性より $\exists q_x \in \mathbb{Q}\ s.t.\ q_x \in B(x;\frac{\varepsilon'_x}{2})$ が成り立つので $x \in B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2})$ である
ここで X 上に $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2}) = B(q_y;\frac{\varepsilon'_y}{2})$ により定める同値関係を入れると $\#X/{\sim} = \#\{B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2}) \mid x \in X\} \leqq \#\{B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2}) \mid (q_x, \frac{\varepsilon'_x}{2}) \in \mathbb{Q}^2\} = \aleph_0$
よって $X/{\sim}$ は高々可算.
$\forall [x] \in X/{\sim}$ に対しある代表値 x をとり代表値全体の集合を A とすると
$\#A = \#X/{\sim} = \aleph_0$.
また $\forall y \in X$ について $\exists x \in A\ s.t.\ x \sim y$ より $y \in B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2})$ であり $x \in B(q_x;\frac{\varepsilon'_x}{2})$ と合わせて考えると $|x-y| < \varepsilon'_x$ となるので
$y \in B(x;\varepsilon'_x) \subset U_{\lambda_x}$ が成り立つ. よって $\{U_{\lambda_x}\}_{x\in A}$ は X の部分被覆であって
$\#\{U_{\lambda_x}\}_{x\in A} \leqq \#A = \aleph_0$ より高々可算.